

## DEVOIR MAISON N° 4

---

### Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ .

1. Quel est l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ ?
2. Quelle est la périodicité de la fonction  $f$ ?
3. (a) Montrer que  $\forall x \in D_f, f(2\pi - x) = f(x)$ .  
(b) Interpréter géométriquement ce résultat.  
(c) À quel intervalle minimal  $I$  peut-on alors ramener l'étude de la fonction  $f$ ?
4. Déterminer la limite de  $f$  en 0. Interpréter géométriquement ce résultat.
5. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle  $]0, \pi]$ .
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $\frac{\pi}{2}$ .
7. Tracer cette tangente et la courbe représentative de  $f$  sur l'intervalle  $]0, 2\pi[$  en prenant pour unité 2 cm.

### Exercice 2 (Extrait d'un sujet de concours)

On considère la fonction  $\phi$  qui, à tout réel  $x$ , associe :

$$\phi(x) = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2}$$

1. Étudier la parité de la fonction  $\phi$ . Que peut-on en déduire pour le domaine d'étude, et pour sa courbe représentative?
2. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $\phi(x) = 1 - \frac{6x^2}{12 + x^2}$ .
3. Calculer, pour tout réel  $x$  :  $\phi'(x)$  (On utilisera le résultat de la question précédente pour faire le calcul le plus simplement possible).
4. Donner le tableau de variations de la fonction  $\phi$  sur  $\mathbb{R}$  (on fera figurer les limites de  $\phi$  aux bornes du domaine d'étude).
5. On donne les valeurs approchées :  $\phi(\pi) \approx -1,71$  et  $2\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1,54$   
Trace à l'aide d'un logiciel (par exemple Géogébra), la courbe représentative de la fonction  $\phi$  sur  $[-\pi, \pi]$ , et la courbe représentative de la fonction cosinus sur  $[-\pi, \pi]$ .  
Que remarque-t-on?