Forme algébrique des nombres complexes

Exercice 1 : Partie réelle et partie imaginaire

Donner la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z :

a) $z = 3 + 7i$ b) $z = -4 + 3i$ c) $z = 5 - 3i$ d) $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

Exercice 2 : Opérations arithmétiques sur les nombres complexes

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) $3 - 2i + 5 + i$ b) $(3-2i)(5+i) - i(3+2i)$ c) $(3-2i)^2$ d) $\frac{3-2i}{5+i}$ e) $\frac{3+i}{2-i} - \frac{2-i}{3+i}$

Exercice 3 : Conjugué d'un nombre complexe.

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) $\overline{3-2i}$ b) $\overline{(1+2i)(3-5i)}$ c) $\frac{(2+4i)^2}{\overline{1-2i}}$ d) $\overline{(3-2i)}(5-i)$ e) $\overline{\left(\frac{2-3i}{-3+i}\right)}$

Exercice 4 : Module d'un nombre complexe.

Déterminer le module du nombre complexe z :

a) $z = 1 - i$ b) $z = 3 + 2i$ c) $z = (1-i)(3+2i)$ d) $z = \frac{1-i}{3+2i}$ e) $z = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

Exercice 5

Soit z un nombre complexe de module 1. Montrer que $z^{-1} = \bar{z}$.

Exercice 6 : Formule du parallélogramme.

1. Démontrer la formule du parallélogramme :
   $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \left|z+z'\right|^2 + \left|z-z'\right|^2 = 2\left(|z|^2 + \left|z'\right|^2\right)$
2. En déduire l'inégalité : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z| + \left|z'\right| \le \left|z+z'\right| + \left|z-z'\right|$.

Exercice 7

Soit z un nombre complexe distinct de $-i$. Soit $\mathrm{Z} = \frac{i-z}{z+i}$.

1. Montrer que $|i-z|^2 = 1 + |z|^2 + i(z - \bar{z})$.
2. De même, donner une expression pour $|z+i|^2$.
3. Démontrer que Z est de module 1 est équivalent à z est un réel.
4. En conclusion, quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que Z soit de module 1 ?

Représentation géométrique des nombres complexes

Exercice 8

Déterminer un argument des nombres complexes de module 1 suivants, et les écrire sous forme exponentielle :

a) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $z = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $z = -1$ d) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ e) $z = i$

Exercice 9 : Mettre sous forme exponentielle sachant que $x \in \mathbb{R}$.

a) $\cos x - i\sin x$ b) $-\cos x - i\sin x$ c) $-\cos x + i\sin x$ d) $\sin x + i\cos x$
e) $-\sin x + i\cos x$ f) $\sin x - i\cos x$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Exercice 10 : Mettre sous forme algébrique.

a) $5e^{i\frac{\pi}{3}}$ b) $3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ c) $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ d) $\frac{5}{2}e^{-i\frac{3\pi}{2}}$ e) $4e^{3i\pi}$ f) $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 11 : Mettre sous forme trigonométrique.

a) $1 + i\sqrt{3}$ b) $-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ c) $-5i$ d) -4 e) $\sqrt{3} - i$ f) $-3\sqrt{3} - 3i$ g) $\frac{7}{2}$

h) $3i$ i) $-\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ j) $\frac{5\sqrt{2}}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{4}$ k) $\frac{2}{1 - i\sqrt{3}}$ l) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$; m) $\frac{i(1+i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-i)^4}$

Exercice 12 : Linéariser.

a) $\cos^5 x$ b) $\sin^4 x$ c) $\cos^2 x \times \sin^3 x$ d) $\cos^4 x \times \sin^2 x$

Exercice 13

On pose $z_1 = -(\sqrt{3} + i)$ et $z_2 = 1 + i$.

1. Mettre $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Algèbre en nombres complexes

Exercice 14

Montrer que pour tout $x \neq \pi\,[2\pi]$, $\quad \dfrac{1-\cos x - i\sin x}{1+\cos x + i\sin x} = -i\tan\dfrac{x}{2}$.

Exercice 15

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad (i+1)^n + (i-1)^n = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\dfrac{n\pi}{4}\, i^n$.

Exercice 16

Déterminer tous les nombres complexes z de module 1 tels que $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^3 \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations.

a) $2z^2 - z + 1 = 0$ b) $-\frac{1}{2}z^2 + 2z + 4 = 0$

Exercice 18 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations.

a) $z^2 - 2(1-i)z - 1 - 2i = 0$ b) $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$ c) $z^2 + (-4+i)z + 5 + i = 0$
d) $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$, où θ est un nombre réel quelconque e) $z^4 + (4-2i)z^2 - 8i = 0$

Exercice 19 : Trouver une racine évidente de l'équation, puis la résoudre dans $\mathbb{C}$.

a) $z^3 - z - 6 = 0$ b) $z^3 - iz^2 - z + i = 0$ c) $2z^3 + z^2 + 3z - i + 1 = 0$