CHAPITRE 2

Nombres complexes i

Sommaire

Le calcul sur des nombres imaginaires apparaît au XVI^{e} siècle en Italie dans le cadre de la résolution des équations du troisième degré par Girolamo Cardano et Rafael Bombelli. En 1748, la célèbre formule d'Euler $e^{v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v$ établit un lien entre les fonctions trigonométriques, l'exponentielle, et les nombres complexes, c'est-à-dire entre la géométrie, l'analyse naissante et l'algèbre. C'est au XIX^{e} siècle qu'est établie la représentation géométrique des nombres complexes, qui assoit leur légitimité en mathématiques. Ils sont alors progressivement employés en physique pour décrire la propagation de la lumière, de la chaleur ou encore de l'électricité.

I Conception algébrique des nombres complexes

1 Premiers calculs sur les nombres complexes

Définition 1 : Nombre complexe

Un nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = x + iy$, dite **forme algébrique**, où x et y sont des nombres réels et i un nombre *i-maginaire* vérifiant $i^2 = -1$.
x est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, et y sa **partie imaginaire**, notée $\mathrm{Im}(z)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble de tous les nombres complexes.

Exemples :

- ▷ $1 + 2i$ est un nombre complexe, sa partie réelle est 1 et sa partie imaginaire est 2.
- ▷ $-3 - \frac{i}{2}$ aussi, sa partie réelle est $x = -3$ et sa partie imaginaire est $y = -\frac{1}{2}$.
- ▷ Tous les nombres réels sont des nombres complexes, et leur partie imaginaire y vaut 0 : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Remarques :

- ▷ Dans toute la suite de ce chapitre, les lettres x et y désignent toujours des nombres réels.

- ▷ Lorsque x vaut 0, le nombre z est appelé imaginaire pur, comme $2i$ ou $-i\pi$.

Théorème 1

On calcule avec des nombres complexes comme avec des nombres réels :
Somme : $(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$
Produit : $(x+iy)\times(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$

Exemple :
- ▷ Montrer que le nombre complexe $1-2i$ est une solution de l'équation $z^2-2z+5=0$.

2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2 : Conjugué d'un nombre complexe

On appelle **conjugué** d'un nombre complexe $z=x+iy$ le nombre complexe $\bar{z}=x-iy$.

Exemple :
- ▷ $\overline{1+2i}=1-2i$ et $\overline{\left(-3-\frac{i}{2}\right)}=-3+\frac{i}{2}$

Remarque :
- ▷ Pour tout nombre complexe z, $\bar{\bar{z}}=z$.

Théorème 2

- Pour tout nombre complexes z, on a $z+\bar{z}=2\ \mathrm{Re}(z)$ et $z-\bar{z}=2i\ \mathrm{Im}(z)$
- Un nombre complexe est un nombre réel si et seulement si $\bar{z}=z$
  Un nombre complexe est un nombre imaginaire pur si et seulement si $\bar{z}=-z$

Théorème 3 : Conjugaison et opérations arithmétiques

La conjugaison est compatible avec les opérations arithmétiques :
Somme : $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$ Produit : $\overline{zz'}=\bar{z}\times\overline{z'}$ Quotient : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

3 Module d'un nombre complexe

Définition 3 : Module d'un nombre complexe

Le **module** d'un nombre complexe $z=x+iy$ est noté $|z|$ et il est défini par :

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Remarques :
- ▷ C'est la même notation que la valeur absolue, ce qui n'est pas un problème car pour tout nombre réel, valeur absolue et module sont égaux.
- ▷ Le module d'un nombre complexe est bien sûr toujours positif, et seul le module du nombre complexe 0 est égal à 0.
- ▷ Pour tout nombre complexe z, Re $(z)\leq|z|$ et Im $(z)\leq|z|$

Théorème 4

$\forall z\in\mathbb{C},\quad z\bar{z}=|z|^2$

Remarque :

▷ Pour tout nombre complexe z non nul, $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Par exemple, $\dfrac{1}{3+i} = \dfrac{3-i}{|3+i|^2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} - \dfrac{1}{\sqrt{10}}i$

Théorème 5 : Module et opérations

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \qquad |z| = |\bar{z}|, \qquad |zz'| = |z| \times |z'|, \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ (lorsque } z' \neq 0)$$

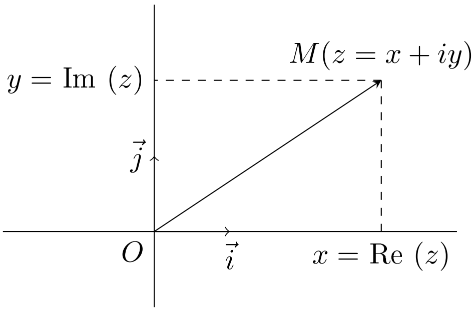
II Représentation géométrique des nombres complexes

1 Affixe et image, argument d'un nombre complexe

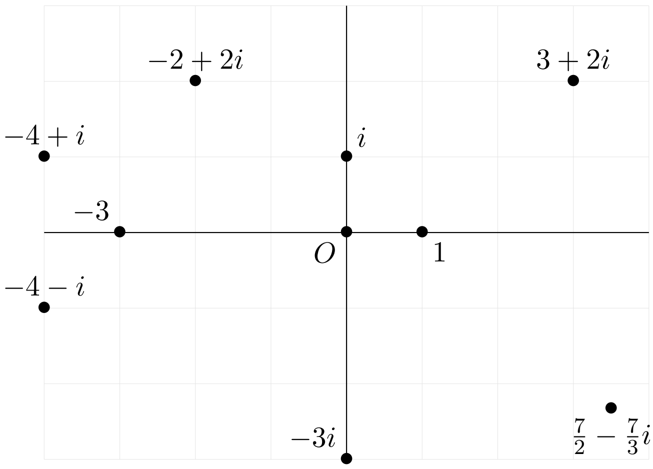
Dans toute la suite de ce cours, on munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Définition 4 : Affixe d'un point et image d'un nombre complexe

On appelle **affixe** d'un point M de coordonnées (x, y) le nombre complexe $z = x + iy$.
On appelle **image** d'un nombre complexe $z = x + iy$ le point M de coordonnées (x, y).



$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$



Théorème 6 : Image du conjugué

Pour tout nombre complexe z, les points $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Théorème 7

Pour tout point M d'affixe z, le module de z est égal à la longueur OM :

$$OM = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

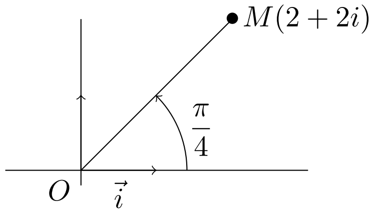
Pour tous points $A(a)$ et $B(b)$, la distance AB est égale à $|b - a|$:

$$AB = |b - a| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Définition 5 : Argument d'un nombre complexe non nul

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$ d'image le point M,
on appelle **argument** de z toute mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Exemples :



- ▷ Un argument de $2+2i$ est $\dfrac{\pi}{4}$.
- ▷ Les nombres complexes dont un argument est 0 sont les nombres réels strictement positifs.

2 Inégalité triangulaire

Remarque :

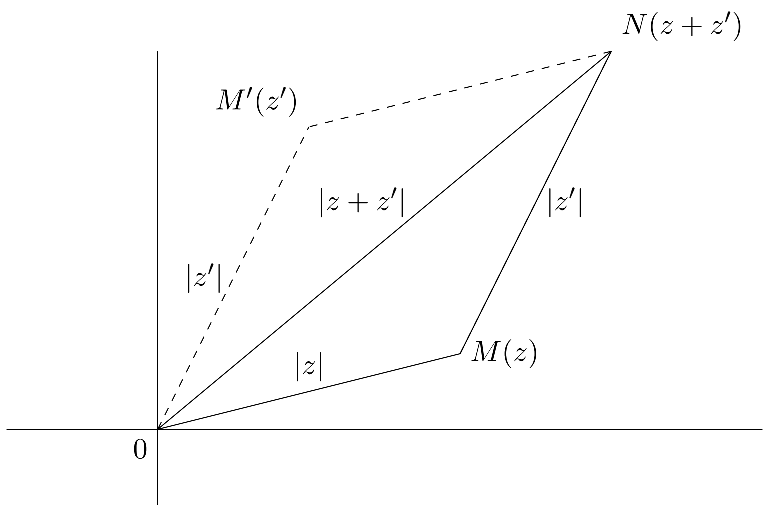
- ▷ Le module d'une somme n'est pas en général égal à la somme des modules, d'où le théorème suivant :

Théorème 8 : Inégalité triangulaire

Pour tous nombres complexes z et z', $|z+z'| \leq |z| + |z'|$
Il y égalité si et seulement si $z = 0$ ou il existe un nombre réel positif k tel que $z' = kz$:

$$|z+z'| = |z| + |z'| \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \text{ ou } \exists k \in \mathbb{R}^+,\ z' = kz$$

Interprétation géométrique :

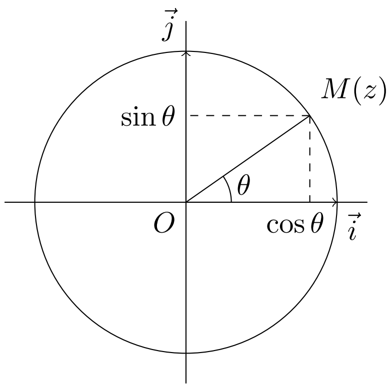


Nous voyons sur la figure que dans le triangle OMN, $ON \leq OM + MN$, donc $|z+z'| \leq |z| + |z'|$. Par ailleurs, l'égalité a lieu si et seulement si les points O, M et N sont alignés, avec M et N du même côté de O.

Démonstration :
Pour tous nombres complexes z et z',
$|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = z\bar{z} + z'\overline{z'} + \bar{z}z' + z\overline{z'} = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\bar{z}z')$
donc $|z+z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|\bar{z}z'| = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z|+|z'|)^2$
donc $|z+z'| \leq |z| + |z'|$
Il y a égalité ssi $\overline{z}z' = \lambda \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = \dfrac{\lambda}{\overline{z}} \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = \dfrac{\lambda}{|z|^2}z = kz$, avec $k \in \mathbb{R}_+$

3 Nombres complexes de module 1

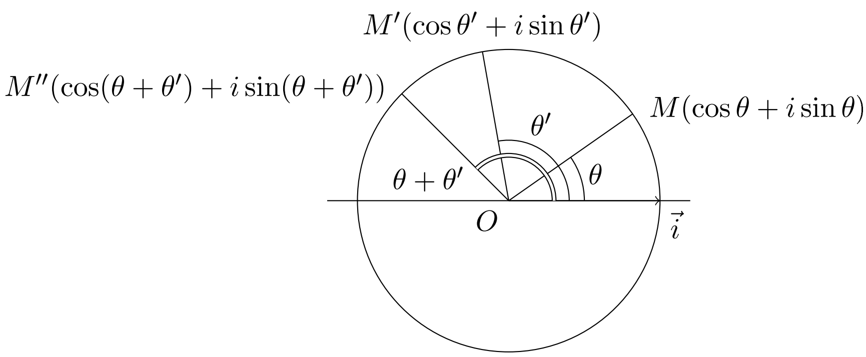
Un nombre complexe z de module égal à 1 est l'affixe d'un point du cercle centré à l'origine et de rayon 1, appelé *cercle trigonométrique*. Notons θ une mesure de l'argument de z.



Théorème 9 : Produit de deux nombres complexes de module 1

Pour tous nombres réels θ et θ' :

$$(\cos\theta + i\sin\theta) \times (\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$$



Démonstration :
Pour tous nombres réels θ, θ',

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta) \times (\cos\theta' + i\sin\theta') &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\end{aligned}$$

Définition 6 : Notation exponentielle

On écrit un nombre complexe z de module 1 sous la forme :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

et θ est une mesure de l'*argument* du nombre complexe z.

Remarques :

- ▷ Cette notation est pour le moment une convention. Nous ne sommes pas encore en mesure de pleinement justifier son lien avec la fonction exponentielle que nous connaissons et qui est définie pour des nombres réels. Néanmoins on a bien $e^{i\times 0} = 1 = e^0$.
- ▷ Cette notation est cohérente avec les propriétés des puissances :
  Pour tous nombres réels θ et θ', $\quad e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- ▷ Par conséquent, pour tout nombre réel θ, $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^0 = 1$, c'est-à-dire que $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont des nombres complexes inverses l'un de l'autre.

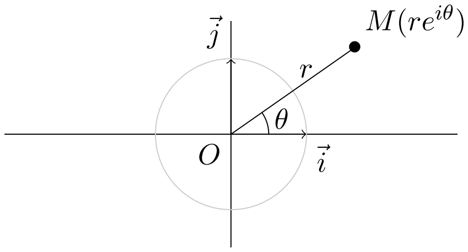
Exemples :

- ▷ $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $1 = e^0$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, ou encore $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

III Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Théorème 10 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe $z \neq 0$ possède une écriture de la forme : $z = re^{i\theta}$,
où $r \in \mathbb{R}_+^*$ est le module de z et θ une mesure de l'argument de z.
Cette forme est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.



Démonstration :
Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, $z = |z| \times \dfrac{z}{|z|}$
or $\dfrac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1.
Donc il existe un nombre réel θ tel que $z = r \times e^{i\theta}$, où r est le module de z.

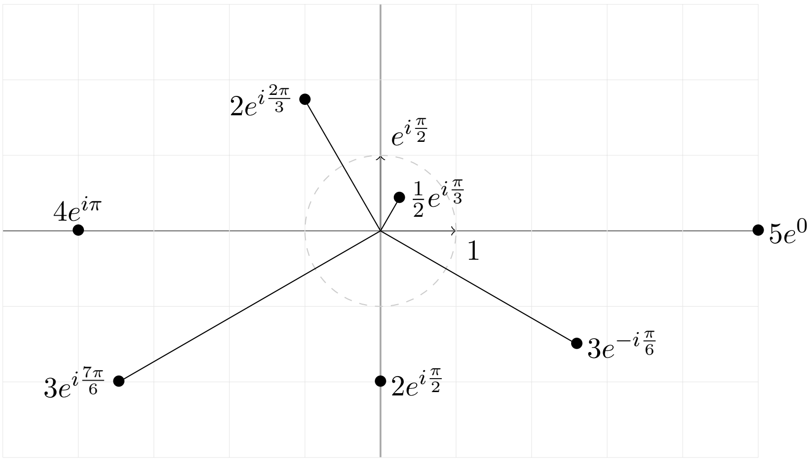
Théorème 11 : Argument et opérations

Pour tous nombres complexes non nuls z et z',

$\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad [2\pi], \qquad \arg(-z) = \pi + \arg z \quad [2\pi]$

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi] \quad$ donc $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \arg(z^n) = n \times \arg(z) \quad [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi] \quad$ donc $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \arg\left(\dfrac{1}{z^n}\right) = -n \times \arg(z) \quad [2\pi]$



Démonstration :
Pour tous nombres complexes z et z' non nuls,
Il existe des nombres réels r et r' strictement positifs, et des nombres réels θ et θ' tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$.
Alors $zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, donc $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
De même, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$, donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$

IV Algèbre avec les nombres complexes

1 Identités algébriques

Théorème 12

Pour tout nombre réel θ, $\quad 1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \quad$ et $\quad 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

Démonstration :
$2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + e^{i\theta}$
$-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} = -2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta - i\sin\theta = 1 - e^{i\theta}$

Remarque :

▷ Pour tous nombres réels p et q, $e^{ip} + e^{iq} = e^{ip}\left(1 + e^{i(q-p)}\right) = e^{ip} \times 2\cos\dfrac{q-p}{2}e^{i\frac{q-p}{2}}$
donc $e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\dfrac{p-q}{2}e^{i\frac{p+q}{2}}$, et de la même façon $e^{ip} - e^{iq} = 2i\sin\dfrac{p-q}{2}e^{i\frac{p+q}{2}}$.
Ces relations permettent de retrouver les formules de trigonométrie de transformation d'une somme en produit.

Corollaire

Pour tout entier naturel n, et pour tout nombre réel $t \neq 0\,[2\pi]$,

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\cos\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\sin(kt) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Démonstration :
$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \dfrac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} = \dfrac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)e^{i\left(\frac{n+1}{2}t\right)}}{-2i\sin\frac{t}{2}e^{i\frac{t}{2}}} = \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)e^{i\left(\frac{n}{2}t\right)}}{\sin\frac{t}{2}}$
On en déduit le résultat en identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres.

Théorème 13 : Formules d'Euler et de Moivre

Formules d'Euler : $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad$ et $\quad\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.
Formule de Moivre : $\forall\theta\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z},\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

Application : Linéarisation.
Linéariser $\cos^n x$, ou $\sin^n x$, c'est l'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ avec $0\leq k\leq n$.
Exemples :
$\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8} = \dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos x$
$\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\dfrac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{8i} = -\dfrac{1}{4}\sin(3x)+\dfrac{3}{4}\sin x$

2 Équation du second degré

Théorème 14

Étant donnée une équation du second degré de la forme :

$$az^2+bz+c=0,\qquad \text{où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont trois nombres complexes, et } a\neq 0,$$

On appelle $\Delta = b^2-4ac$ le **discriminant** de l'équation. Soit δ un nombre tel que $\delta^2=\Delta$.
Alors l'équation a pour solutions :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

(si $\Delta = 0$, alors ces expressions sont égales et il n'y a qu'une solution)
La somme des racines est $z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et le produit des racines est $z_1\times z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exemple :

▷ Résolvons l'équation $z^2+(-3+2i)z+5-i=0$.
$\Delta = (-3+2i)^2-4(5-i) = -15-8i$: il faut trouver un nombre δ tel que $\delta^2 = -15-8i$.
Écrivons δ sous sa forme algébrique $\alpha+i\beta$. Alors $\delta^2 = \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta$
Il faut donc résoudre : $\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=-15\\ 2\alpha\beta=-8\end{cases}$
En substituant, on trouve que α^2 est solution de l'équation $X^2+15X-16=0$.
On trouve $\alpha^2=1$ ou $\alpha^2=-16$ (impossible). Donc on peut prendre par exemple $\alpha=1$ et $\beta=-4$, soit $\delta = 1-4i$ et les racines de l'équation de départ sont :
$z_1 = \dfrac{3-2i-(1-4i)}{2} = 1+i$ et $z_2 = \dfrac{3-2i+(1-4i)}{2} = 2-3i$