

DEVOIR MAISON N° 3

Exercice 1 : Somme et produit des racines

Étant donnés deux nombres réels S et P , on cherche deux nombres complexes x et y tels que la somme $x + y$ soit égale à S et le produit xy soit égal à P .

1. Montrer que x et y sont solution de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$.
2. Trouver deux nombres dont la somme soit égale à 2 et le produit égal à -1.
3. Trouver deux nombres dont la somme soit égale à $1 + i$ et le produit égal à $5i$.

Exercice 2 : Résolution des équations du troisième degré

On cherche à résoudre l'équation générale du troisième degré $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, avec a, b, c, d des nombres complexes quelconque, $a \neq 0$.

La méthode utilisée ici est tirée de l'ouvrage *Ars Magna* de Girolamo Cardano (1501-1576).

1. Montrer que le changement de variable $x = z - \frac{b}{3a}$ permet de se ramener à une équation de la forme $z^3 + pz + q = 0$, avec $p, q \in \mathbb{C}$.
2. L'astuce de Cardan consiste à poser $z = u + v$.
Montrer que l'équation devient $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.
3. Expliquer pourquoi on peut choisir u et v tels que $3uv + p = 0$.

4. Montrer qu'alors l'équation est équivalente au système
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases},$$

et exprimer u^3 et v^3 en fonction de p et q .

On peut alors déterminer les valeurs possibles de u et de v , et par suite celles de z , **sans oublier que l'on doit avoir** $3uv + p = 0$.

5. Utiliser la méthode ci-dessus pour résoudre les équations :
a) $x^3 - 18x - 35 = 0$ b) $x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0$

HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
 SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
 Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
 OPVS PERFECTVM
 inscripsit, est in ordine Decimus.



HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinventionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo unum, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres unum æquales fuerint, nodum explicant. Hunc autem librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmetice thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auèdius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Page de titre de l'*Ars Magna* de Cardan,
https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Cardan