DEVOIR MAISON N° 3

Exercice 1 : Somme et produit des racines

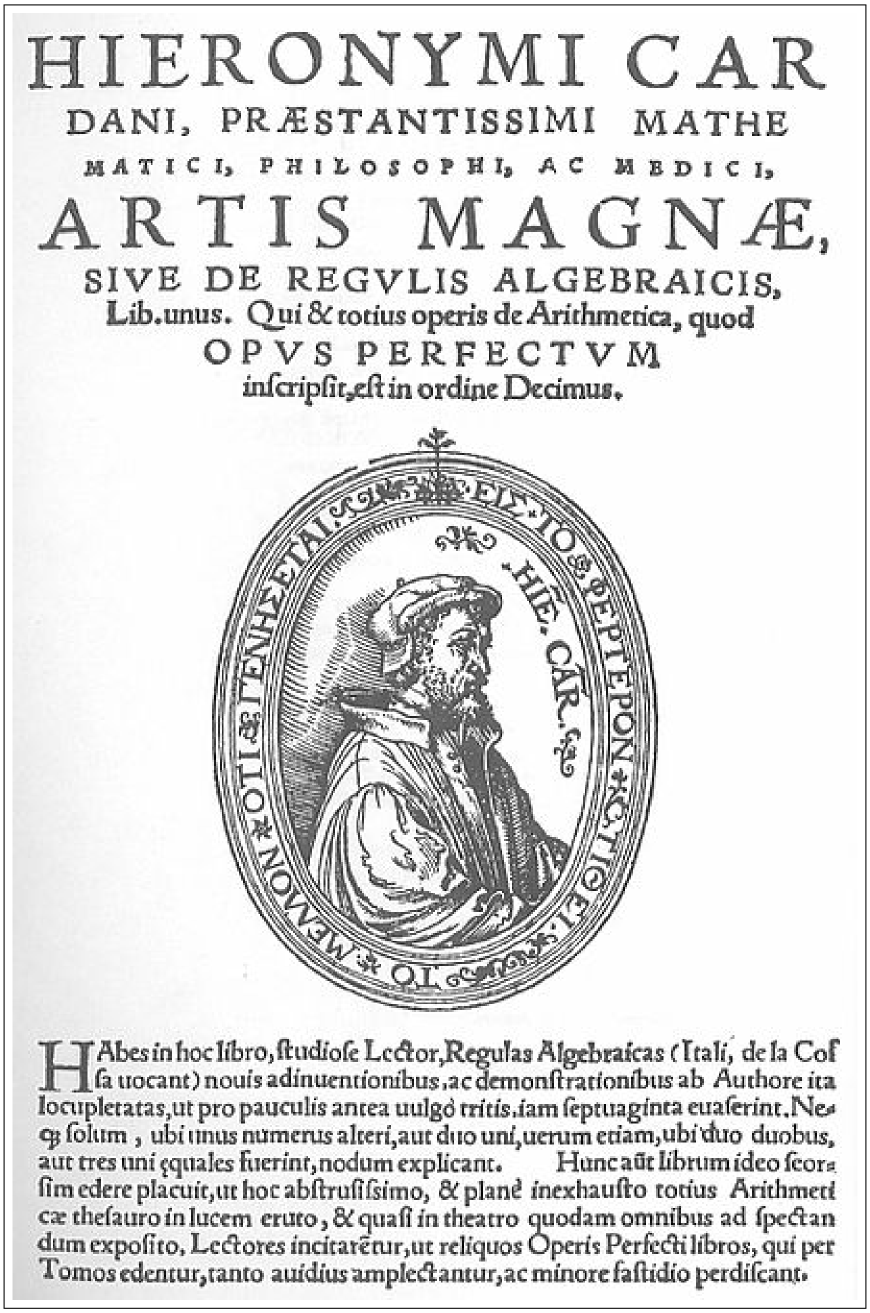
Étant donnés deux nombres réels S et P, on cherche deux nombres complexes x et y tels que la somme $x+y$ soit égale à S et le produit xy soit égal à P.

1. Montrer que x et y sont solution de l'équation $z^2 - \mathrm{S}z + \mathrm{P} = 0$.
2. Trouver deux nombres dont la somme soit égale à 2 et le produit égal à -1.
3. Trouver deux nombres dont la somme soit égale à $1+i$ et le produit égal à $5i$.

Exercice 2 : Résolution des équations du troisième degré

On cherche à résoudre l'équation générale du troisième degré $ax^3+bx^2+cx+d=0$, avec a,b,c,d des nombres complexes quelconque, $a \neq 0$.
La méthode utilisée ici est tirée de l'ouvrage *Ars Magna* de Girolamo Cardano (1501-1576).

1. Montrer que le changement de variable $x = z - \dfrac{b}{3a}$ permet de se ramener à une équation de la forme $z^3 + pz + q = 0$, avec $p, q \in \mathbb{C}$.
2. L'astuce de Cardan consiste à poser $z = u + v$.
   Montrer que l'équation devient $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.
3. Expliquer pourquoi on peut choisir u et v tels que $3uv + p = 0$.
4. Montrer qu'alors l'équation est équivalente au système $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$,
   et exprimer u^3 et v^3 en fonction de p et q.
   On peut alors déterminer les valeurs possibles de u et de v, et par suite celles de z, **sans oublier que l'on doit avoir** $3uv + p = 0$.
5. Utiliser la méthode ci-dessus pour résoudre les équations :
   a) $x^3 - 18x - 35 = 0$ b) $x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0$



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Page de titre de l'*Ars Magna* de Cardan,
`https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Cardan`