Division euclidienne

Exercice 1

Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^6 + 1$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$.
2. $A = 2X^4 - 11X^3 + 7X^2 + 6X - 2$ et $B = 2X^2 - 5X + 2$.
3. $A = X^{20} - 2X^{15} + 3X^{10} - 4X^5 + 5$ et $B = X^7 + X^2$.
4. $A = X^5 + iX^4$ et $B = X^2 + 1$.
5. $A = 2X^3 - (1+i)X^2 - iX - (1-i)$ et $B = iX + 1$.
6. $A = iX^4 - X^3 + 2iX + 1$ et $B = (1-i)X^2 + iX + 1 + i$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel, θ, a, b trois éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1. $A_n = ((\sin\theta)X + \cos\theta)^n$ par $B = X^2 + 1$.
2. $A_n = X^{2n} + X^n + 1$ par $B = X^2 + X + 1$.
3. $A_n = X^n$ par $B = (X - a)$, puis par $C = (X-a)(X-b)$, puis par $D = (X-a)^2$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A - I_2)(A - 3I_2) = 0$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-3)$.
3. En déduire la valeur de A^n.

Exercice 4

Factoriser le plus possible (dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$) les polynômes :

a) $\left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1$ b) $X^4 + X^2 + 1$ c) $X^8 + X^4 + 1$ d) $X^9 + X^6 + X^3 + 1$
e) $X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$ f) $X^6 - 5X^4 + 19X^2 + 25$ g) $X^5 - 4X^3 + 10X^2 - 13X + 6$

Exercice 5

On considère les polynômes :
$A = X^9 - X^8 - 4X^7 + 7X^6 + X^5 - 10X^4 + 6X^3 + 3X^2 - 4X + 1$ et $B = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1$.
Factoriser B et démontrer qu'il divise A.

Exercice 6

Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1. Déterminer deux racines entières de P ainsi que leurs multiplicités.
2. Vérifier que j est racine de P.
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7

Soit $n \geq 3$. Démontrer que $1 - nX + X^n$ n'a que des racines simples.

Exercice 8

1. Montrer que si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et si $\forall i \in \{0; \cdots; n\}, P(i) = 0$ alors $P = 0$
2. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si $\forall x \in [0;1], P(x) = Q(x)$ alors $P = Q$.

Exercice 9

On cherche à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ qui vérifient $P(X+1) = P(X)$.

1. Vérifier que si α est racine de P, alors $\alpha + 1$ également puis que P admet une infinité de racines.
2. Conclure

Exercice 10

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$

1. Montrer que si a est une racine éventuellement complexe de P alors a^2 et $(a+1)^2$ sont aussi des racines de P.
2. En déduire que $\left(a^{2^n}\right)$ et $\left((a+1)^{2^n}\right)$ sont des racines pour tout entier $n \geq 1$.
3. Montrer que 0 n'est pas racine de P.
4. En déduire que si a est une racine de P alors $|a+1| = |a| = 1$.
5. En déduire les racines de P et la forme de P.

Exercice 11

Soit $P = (X+1)^n - 1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines de P puis donner la factorisation de P ainsi que de $\dfrac{P(X)}{X}$.
2. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

Exercice 12

En utilisant les relations coefficients racines disponibles sur les polynômes, trouver deux complexes x, y qui satisfont dans chacun des cas suivants :

$$\left\{\begin{array}{r} x+y=0 \\ xy=2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \\ xy=2 \end{array}\right.$$