On se propose de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe deux entiers naturels a et b strictement positifs tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$.
On considère une famille de polynômes définie par $P_0(X) = 1$ et, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$P_n(X) = \frac{X^n(a-bX)^n}{n!}$$

Dans tout ce problème, on identifie un polynôme à sa fonction polynômiale associée.
Étant donné un entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin(x)\,dx$$

Partie 1. Préliminaires

1. Dans cette question, on désigne par α un réel strictement positif fixé.
   Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$.
   (a) Rappeler la définition de la partie entière d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$.
   (b) On pose $n_0 = \lfloor \alpha \rfloor$. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge.
   (d) Justifier que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \sin\left(x - n\dfrac{\pi}{2}\right)$ est la fonction F définie par $F(x) = \sin\left(x - (n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Partie 2. Étude de la fonction polynomiale P_n

1. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction P_n est positive sur $[0,\pi]$.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction P_n possède un maximum sur $[0,\pi]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ non nul fixé. On souhaite dresser le tableau de variation de la fonction P_n.
   (a) Calculer $P_n(0)$ et $P_n(\pi)$.
   (b) Exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1}, a et b.
   (c) Dresser le tableau de variation complet sur $[0,\pi]$ de la fonction P_n.
   (d) En déduire que
   $$\max_{x\in[0,\pi]} |P_n(x)| = \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$$

3. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{P}_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = \mathrm{P}_n(x)$$

Partie 3. Étude de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.
   (b) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n > 0$$
2. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$.
   (b) En déduire la convergence et la valeur de la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 4. Étude du polynôme P_n

Dans toute cette partie, on désigne par n un entier naturel fixé.

1. Déterminer le degré du polynôme P_n.
2. Pour n non nul, justifier que, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\mathrm{P}_n^{(j)}(0) = 0$ et $\mathrm{P}_n^{(j)}(\pi) = 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que la forme développée de P_n est $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \sum\limits_{j=n}^{2n} \dfrac{1}{n!}\begin{pmatrix} n \\ j-n \end{pmatrix} a^{2n-j}(-b)^{j-n}\mathrm{X}^j$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel j tel que $n \leqslant j \leqslant 2n$, on a
   $$\mathrm{P}_n^{(j)}(0) = (j-n)!\begin{pmatrix} j \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ j-n \end{pmatrix} a^{2n-j}(-b)^{j-n}$$
   (c) Pour tout entier naturel j, démontrer que $\mathrm{P}_n^{(j)}(0)$ et $\mathrm{P}_n^{(j)}(\pi)$ sont des entiers relatifs. On distinguera les cas $0 \leqslant j < n$, $n \leqslant j \leqslant 2n$ et $2n < j$.

Partie 5. Irrationalité de π

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathrm{I}_n = \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} (-1)^j \left[\mathrm{P}_n^{(j)}(x)\sin\left(x - (j+1)\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\pi} - (-1)^{\mathrm{N}} \int_0^{\pi} \mathrm{P}_n^{(\mathrm{N}+1)}(x)\sin\left(x - (\mathrm{N}+1)\frac{\pi}{2}\right) dx$$
2. En déduire que I_n est un entier relatif pour tout entier naturel n.
3. Conclure que π est irrationnel.