Théorème de la limite de la dérivée

Exercice 1 :

Étudier la continuité et la dérivabilité sur leur domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \text{Arcsin}\left(1-x^2\right)$ b) $f_2(x) = \text{Arcsin}\,\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ c) $f_3(x) = \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{\text{ch}(x)}\right)$ d) $f_4(x) = \cos\sqrt{x}$.

Exercice 2

Montrer que $x \mapsto x^2 \ln(x)$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3

Étudier l'ensemble de définition, le prolongement par continuité de la fonction, et la dérivabilité de celui-ci pour la fonction $x \mapsto x^x$.

Exercice 4

On pose f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + x^2 + x^{5/2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
2. Montrer que f est dérivable en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Exercice 5

Déterminer les valeurs des réels a, b et c pour lesquelles la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6

Soit $f : \begin{cases} [-1;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\,\text{Arcsin}\left(1-x^2\right) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $[-1;1]$.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $[-1;0[$ et sur $]0;1]$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $[-1;1]$.

Exercice 7

Étudier la classe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 \ln(x)$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.
2. $g_n(x) = x^n$ si $x > 0$, et $g_n(x) = 0$ si $x \leq 0$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Théorème des accroissements finis

Exercice 8

En utilisant le théorème des accroissements finis, donner une majoration de l'erreur commise dans les approximations suivantes :

a) $\dfrac{1}{10,1} \approx 0,1$ b) $\sqrt{906} \approx 30$ c) $\sqrt[3]{27\,100} \approx 30$

Exercice 9

On pose : $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{1+k^2}$.

1. Montrer que pour tout $a \geq 0$, $\dfrac{1}{1+(1+a)^2} \leq \arctan(a+1) - \arctan(a) \leq \dfrac{1}{1+a^2}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite ℓ.

Exercice 10

Soit $f : \begin{cases}]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto \ln\big(\ln(x)\big) \end{cases}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Montrer que :
$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) < \frac{1}{k\ln(k)}$$
2. En déduire que la suite de terme général : $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)}$ diverge.

Exercice 11 : Un grand classique, à connaître par cœur.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha+1} = \alpha$ et qu'on a $\alpha \in]0,1[$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Calculs de dérivées n-ièmes

Exercice 12

Déterminer $f^{(n)}$ pour les fonctions f ci-dessous, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $f(x) = xe^{-x}$
2. $f(x) = x^2 e^x$
3. $f(x) = e^x \ln(x)$

Exercice 13

Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos^2 x$.
2. $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
3. $h(x) = x(x-2)^p \quad (p \in \mathbb{N})$.

Exercice 14

1. Pour $a \in \mathbb{R}^*$, justifier que la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$ est de classe C^∞ sur deux intervalles I_1 et I_2 que l'on précisera et calculer $f^{(n)}(x)$ pour $x \in I_1 \cup I_2$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une expression simple de la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.
3. Retrouver le résultat ci-dessus en appliquant la formule de Leibniz.

Exercice 15

Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\arctan^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^n}$ où P_n est une fonction polynômiale. Donner une relation entre P_{n+1} et P_n.

Exercice 16

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, où P_n est une fonction polynômiale. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$: « $f^{(n)}$ admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en posant $f^{(n)}(0) = 0$ ». Montrer par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
4. Montrer que f admet un prolongement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Applications des théorèmes sur les fonctions dérivées

Exercice 17

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable et dont la dérivée ne s'annule pas. Montrer que f n'est pas périodique.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dérivable, telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, montrer qu'alors : $\exists c\in\mathbb{R}, f'(c)=0$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.
   Montrer que $f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$ et $f(b)=0 \Rightarrow \exists c\in\,]a,b[\,, f^{(n)}(c)=0$.

Exercice 18

Soient $x\in\mathbb{R}_+^*$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t)=e^{x-t}-\left(1+(x-t)+\dfrac{(x-t)^2}{2}\right)-\mathrm{A}\dfrac{(x-t)^3}{6}$ avec $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer une condition sur A pour que φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur l'intervalle $[0;x]$. On suppose dans la suite que cette condition est vérifiée.
2. Vérifier que $\varphi(x)=\varphi'(x)=\varphi''(x)=0$.
   En déduire l'existence de $c\in\,]0;x[$ tel que $\varphi^{(3)}(c)=0$, puis que $\mathrm{A}=e^{x-c}$.
3. À l'aide des deux questions précédentes, montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,
   $\left|e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)\right|\leq\dfrac{x^3e^x}{6}$.