CHAPITRE 14

Dérivation

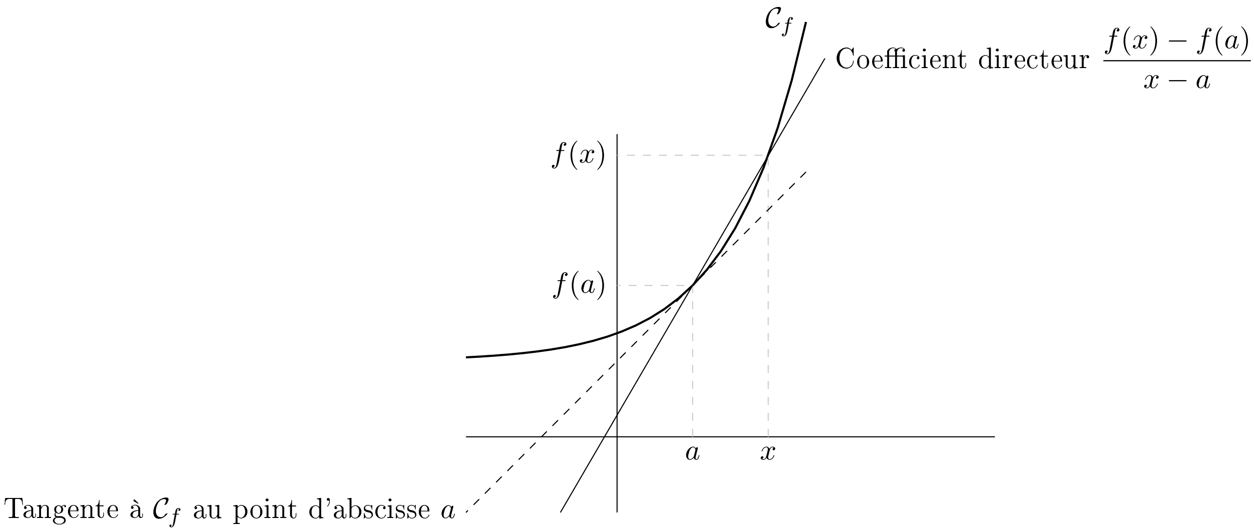
Sommaire

I Définitions 1
II Théorèmes sur les fonctions dérivables 4
III Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ 7
IV Fonctions à valeurs complexes 7

I Définitions

Définition 1 : Dérivabilité en un point

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite dérivable au point $a \in I$ lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Le cas échéant, cette limite est appelée **nombre dérivé** de la fonction f au point a.



Remarque :

▷ De façon équivalente, on peut considérer la limite l du rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0. En notant $\epsilon(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - l$, on obtient $f(a+h) = f(a) + lh + h\epsilon(h)$, où la fonction ϵ est définie au voisinage de 0 et vérifie $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.

Exemple :

- ▷ La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- ▷ La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. En 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ donc } \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \text{ donc } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0.$$

Théorème 1 : Dérivabilité ⇒ Continuité

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$,
si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration :
En effet, on a $f(a+h) = f(a) + lh + h\epsilon(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.
Donc $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$, donc f est continue au point a.

Définition 2 : Dérivabilité à droite et à gauche

Dans la définition précédente, lorsque a est une extrémité à gauche (resp. à droite) de l'intervalle I, on dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a.

Exemple :

- ▷ La fonction valeur absolue admet en 0 une dérivée à gauche égale à -1 et une dérivée à droite égale à 1. Mais elle n'est pas dérivable en 0.

Définition 3 : Dérivabilité sur un intervalle

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite dérivable sur I lorsque elle est dérivable en chaque point a de I.

Dérivée de la fonction puissance :

- ▷ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.
  On a $f(a+h) = (a+h)^n = a^n + nha^{n-1} + h \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} a^{n-k}$.
  Notons $\epsilon(h) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} a^{n-k}$: $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$ donc f est dérivable en a et $f'(a) = na^{n-1}$.

Théorème 2 : Opérations sur les fonctions dérivables

• Toute combinaison linéaire, tout produit et tout quotient (dans la mesure où il est bien défini) de fonctions dérivables en un point a (resp. sur un intervalle I) est une fonction dérivable en a (resp. sur l'intervalle I).
• Fonction composée : soit g une fonction définie d'un intervalle I dans un intervalle J, et f une fonction définie sur l'intervalle J, si g est dérivable en a (resp. sur I) et f est dérivable en $b = g(a)$ (resp. sur J), alors $f \circ g$ est dérivable en a (resp. sur I).
• Étant donnée une fonction f bijective d'un intervalle I dans un intervalle J, dérivable en $a \in I$ (resp. sur l'intervalle I) telle que $f'(a) \neq 0$ (resp. $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$), la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ (resp. sur J) et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$ (resp. $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$ pour tout $y \in J$).

Démonstration :
Démontrons les formules de dérivation du produit de deux fonctions, de l'inverse d'une fonction, et de la composée de deux fonctions.
Produit : soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I et dérivables en $a \in I$.
Alors $\dfrac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \dfrac{\big(f(x) - f(a)\big)g(x)}{x-a} + \dfrac{\big(g(x) - g(a)\big)f(a)}{x-a}$
or g est dérivable donc continue en a donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$
donc le taux d'accroissement admet pour limite $f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$ quand $x \to a$.
Inverse : soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$ telle que $f(a) \neq 0$.
Alors il existe un voisinage de a dans lequel f ne s'annule pas, et pour tout x dans ce voisinage,

$$\frac{\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(a)}}{x-a} = -\frac{1}{f(x)f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)}$$

or f est dérivable donc continue en a donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
donc le taux d'accroissement admet pour limite $-\dfrac{f'(a)}{f(a)^2}$ quand x tend vers a.
Composée : soient une fonction f définie sur un intervalle I, à valeurs dans J, dérivable en $a \in I$, et g définie sur J et dérivable en $b = f(a)$.
Alors $\dfrac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = \dfrac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(x) - f(a)} \times \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$
ce taux d'accroissement tend vers $g'\big(f(a)\big) \times f'(a)$.

Corollaire

La fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Les fonctions Arccos et Arcsin sont dérivables sur $]-1, 1[$.
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.
Pour tout $a \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = \ln a \times a^x$.

Théorème 4 : Formule de Leibniz

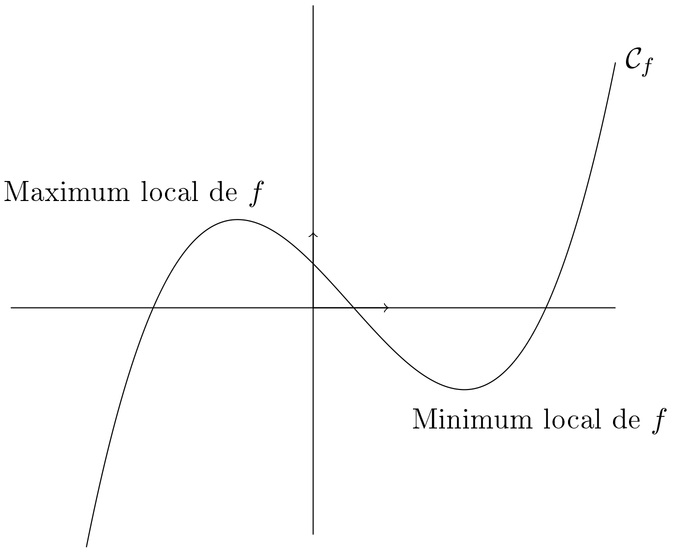
Étant données deux fonctions f et g dérivables chacune n fois sur un intervalle I.
Alors $f \times g$ est dérivable n fois sur I et : $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Démonstration :
Par récurrence sur n.

II Théorèmes sur les fonctions dérivables

Définition 4 : Extremum local

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I, et a un nombre à l'intérieur de I, on dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en a lorsqu'il existe un voisinage de a tel que $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) pour tout nombre x de ce voisinage.



Théorème 5

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I, dérivable en a situé à l'intérieur de I, et admettant un extremum local en a. Alors $f'(a) = 0$.

Démonstration :
Plaçons-nous dans le cas où f admet un maximum local en a.
Pour tout x dans un voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$ donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est positif pour $x < a$, et négatif pour $x > a$. Donc la limite de ce rapport est à la fois positive et négative, donc elle vaut 0 : $f'(a) = 0$.

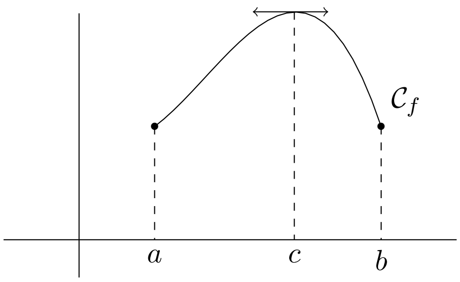
Théorème 6 : Théorème de Rolle

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ qui vérifie :

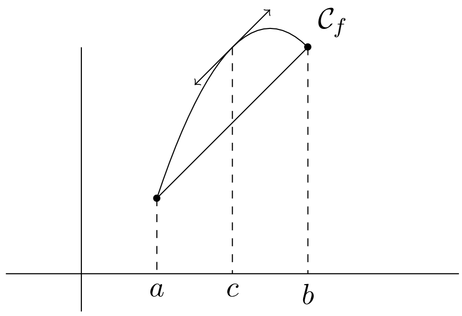
- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$,
- $f(a)=f(b)$

Alors il existe un nombre $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Démonstration :
Dans le cas où f est une fonction constante, le théorème est évident.
Dans le cas contraire, f est continue sur $[a,b]$ donc $f([a,b])$ est un segment $[U,V]$, et $\exists\alpha,\beta\in[a,b]$, $U=f(\alpha)$ et $V=f(\beta)$. Comme $f(a)=f(b)$, l'un des deux nombres α, β n'est ni a ni b (sinon f serait constante). Appelons-le c. f admet un extremum local en c, et f est dérivable en c, donc $f'(c)=0$.



Théorème de Rolle



Théorème des accroissements finis

Théorème 7 : Égalité des accroissements finis

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ qui vérifie :

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$,

Alors il existe un nombre $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Démonstration :
On applique le théorème de Rolle à la fonction $x\mapsto f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Théorème 8 : Inégalité des accroissements finis

Étant donnée une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I, telle que $|f'(x)|$ soit majorée par un nombre M pour tout $x\in I$,
alors $\forall x_1,x_2\in I$, $|f(x_2)-f(x_1)|\leq M|x_2-x_1|$: on dit que f est $M-$lipschitzienne.

Démonstration :
Pour tous $x_1, x_2 \in I$, f est dérivable sur $[x_1, x_2]$, donc, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe un nombre $c \in]x_1, x_2[$ tel que $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$.
Donc $\left|\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| = |f'(c)| \leq M$.

Exemple :
- ▷ Les fonctions cos et sin sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$.
- ▷ La fonction carrée n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ mais elle est 4-lipschitzienne sur $[-2, 2]$.
- ▷ La fonction racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$ mais elle est $\dfrac{1}{2}$−lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

Théorème 9

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et dérivable à l'intérieur de I. Alors :
- f est constante sur I ssi $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$;
- f est croissante (resp. décroissante) sur I ssi $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) pour tout $x \in I$;
- f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I ssi $f'(x) > 0$ (resp. < 0) pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Démonstration :
• Sens direct : si f est constante, alors $\forall x, a \in I$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$, donc par passage à la limite $f'(a) = 0$, donc f' est identiquement nulle.
Réciproque : si f' est identiquement nulle, prenons $a \in I$ quelconque.
$\forall x \in I$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe c entre a et x tel que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$ donc $f(x) = f(a)$, donc f est constante.
• Sens direct : si f est croissante, alors $\forall x, a \in I$, $f(x) - f(a)$ et $(x - a)$ sont toujours de même signe, donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$, donc à la limite $f'(a) \geq 0$, donc f' est positive.
Réciproque : si f' est positive sur I, $\forall x_1, x_2 \in I$, tels que $x_1 \leq x_2$, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]x_1, x_2[$, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0$, donc $f(x_2) \geq f(x_1)$, donc f est croissante.
• (admis)

Théorème 10 : Limite de la dérivée

Étant donnée une fonction f continue sur un intervalle I, dérivable sur I sauf en a, et telle que $f'(x)$ admet une limite l lorsque x tend vers a.
Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Exemple :
- ▷ Prenons f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$. f est dérivable dès lors que $\operatorname{ch} x - 1 \neq 0$, donc sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Sur ces intervalles, $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}$.

  Donc pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x - 1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch} x - 1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\operatorname{ch} x + 1}$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Or f est paire, donc $f'_g(0) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. f est seulement dérivable à droite et à gauche en 0.

Remarque :

- ▷ La réciproque est fausse. Nous avons vu que la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable en 0 et néanmoins $\forall x \neq 0,\ f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$, qui n'admet pas de limite en 0.

Démonstration :
Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, f est continue sur $[a, x]$, et dérivable sur $]a, x[$, (ou $]x, a[$), donc, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe un nombre $c_x \in]a, x[$ (ou $]x, a[$) tel que : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$. Par conséquent, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers l quand x tend vers a.

III Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 5

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, avec $k \in \mathbb{N}^*$, lorsque f est k fois dérivable sur I et que $f^{(k)}$ est une fonction continue sur I.

Remarque :

- ▷ Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est simplement une fonction indéfiniment dérivable.
- ▷ On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble de toutes les fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I.

Théorème 11 : Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

Toute combinaison linéaire, tout produit et tout quotient, toute composée (dans la mesure où ils sont définis) de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est également de classe $\mathcal{C}^k$.
Toute réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ **dont la dérivée ne s'annule pas** est de classe $\mathcal{C}^k$.

IV Fonctions à valeurs complexes

Théorème 12 : Inégalité des accroissements finis

Étant donnée une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I, telle que $|f'(x)|$ soit majorée par un nombre M pour tout $x \in I$,
alors $\forall x_1, x_2 \in I$, $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$: on dit que f est $M-$lipschitzienne.

Remarque :

- ▷ Le théorème de Rolle n'a pas d'équivalent pour les fonctions à valeurs complexes.
  Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(0) = f(2\pi)$. Néanmoins sa dérivée $f'(x) = ie^{ix}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.