Calculs de limites

Exercice 1 : Étudier la ou les limite(s) de l'expression en a.

1. $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$ en $a=1$
2. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en $a=1$
3. $\dfrac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$ en $a=+\infty$
4. $\sqrt{x^2+2x}-x$ en $a=+\infty$
5. $x^5e^{-x^2}$ en $a=-\infty$
6. $\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$ en $a=+\infty$
7. $\dfrac{x\ln x+7}{x^2+4}$ en $a=+\infty$
8. $\dfrac{4\sin^2 x+3\cos(5x)}{x}$ en $a=+\infty$
9. $\dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$ en $a=-\infty$
10. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$ en $a=0$
11. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x}$ en $a=+\infty$
12. $\dfrac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}$ en $a=0$

Définition de la limite

Exercice 2 : Définition de la limite

En utilisant la définition de la limite, montrer que :
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}=+\infty$

Exercice 3 : Limites à gauche et à droite

On considère la fonction $f:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x}{2x+|x|}\end{array}\right.$

1. Déterminer les limites de f à gauche et à droite en 0.
2. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Exercice 4 : Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.

1. Trouver deux suites (u_n) et (v_n) de nombres strictement positifs telles que :
   — $\lim u_n=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, f(u_n)=1$
   — $\lim v_n=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, f(v_n)=-1$
2. La fonction f admet-elle une limite en 0 ? Le démontrer.

Exercice 5 : Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 6 : Un théorème

On veut montrer qu'une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ qui admet une limite en $+\infty$ est nécessairement constante. On note T la période de f et l sa limite en $+\infty$.
On procède par l'absurde, en supposant que f n'est pas constante, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres réels x_0 et y_0 tels que $f(x_0) \neq f(y_0)$.

1. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = x_0 + n\mathrm{T}$ et $y_n = y_0 + n\mathrm{T}$. Justifier que les suites $\big(f(x_n)\big)$ et $\big(f(y_n)\big)$ sont constantes.
2. Conclure.

Exercice 7 : Montrer qu'une fonction admet une limite

On note F la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ qui s'annule en 0, c'est-à-dire que $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire que F admet une limite en $+\infty$.
3. Montrer que : $\forall x \geq 1, \dfrac{1}{1+x^3} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$.
4. En déduire que pour $x \geq 1, \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{1+t^3} \leq \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$
5. En déduire pour tout $x \geq 0$: $\mathrm{F}(x) \leq 1 + \dfrac{\pi}{4}$, puis que F admet une limite finie en $+\infty$.

Continuité d'une fonction sur un intervalle

Exercice 8

Déterminer les valeurs des nombres réels a et b pour que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+a^2} \quad \text{si } x < 0 \\ 1 + b \text{ si } x = 0 \\ bx + 2a \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

soit continue $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

1. Quel est l'ensemble de définition E de f ?
2. f est-elle continue sur E ?

Exercice 10

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$
2. $f(x) = \sin(x) \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$

Exercice 11

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité au point a indiqué ?

1. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $a = 0$
2. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$ en $a = 0$
3. f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$ en $a = 0^+$
4. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$ en $a = 1$.

Image d'un intervalle

Exercice 12

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Dans le second cas, donner un contre-exemple (une seule des quatre est vraie).

1. L'image par une fonction continue d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
2. L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.
3. L'image par une fonction continue d'une partie bornée est une partie bornée.
4. L'image réciproque par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.

Exercice 13

1. Montrer sans la résoudre que l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions réelles.
2. Écrire un algorithme qui fournisse une valeur approchée par défaut à 0,01 près de la plus petite de ces solutions.

Exercice 14 : Théorème du point fixe

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Démontrer que f admet au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$.

Exercice 15

Montrer que l'équation $\ln x = 2 - x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1,2]$.

Exercice 16

Un cycliste parcourt 30 km en une heure.

1. Démontrer qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes pendant lequel le cycliste a parcouru 5 km.
2. Existe-t-il nécessairement un intervalle de temps de 40 minutes durant lequel il aura parcouru 20 km ?

Exercice 17

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n + nx - 1 \end{array} \right.$, et l'équation $(\mathrm{E}_n) : f_n(x) = 0$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution x_n dans l'intervalle $[0,1]$.
2. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.
4. Déterminer la limite de (x_n).

Exercice 18 : Limite d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0$$

Équation fonctionnelle

Exercice 19

On cherche à déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, continues en 0, et vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On suppose que f est une solution du problème, et on note x un nombre réel quelconque.

1. Déterminer $f(0)$. En déduire que f est impaire.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On note $a = f(1)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$ et en déduire que $f(n) = an$.
   (b) En déduire également que, pour tous entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = a\dfrac{p}{q}$.
4. Justifier que $x = \lim \dfrac{1}{2^n}\lfloor 2^n x \rfloor$.
5. En déduire que $f(x) = ax$ et conclure.