CHAPITRE 13

Fonctions : Limites et Continuité

Sommaire

Les notions de continuité et de limite d'une fonction ont été précisées par Augustin Louis Cauchy (1789-1857) à l'occasion de son cours d'analyse donné à l'École polytechnique et publié à partir de 1821. Elles ont permis d'établir des fondements solides sur le plan de la rigueur mathématique dans le domaine de l'analyse, c'est-à-dire de l'étude des fonctions, là où les mathématiciens du siècle précédent avaient privilégié les démarches heuristiques.

Augustin Louis Cauchy

I Définitions de la limite d'une fonction

Définition 1 : Limite finie en un point

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I, et a un nombre réel appartenant à I ou une extrémité de I, on dit que f admet pour limite l quand x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, lorsque :

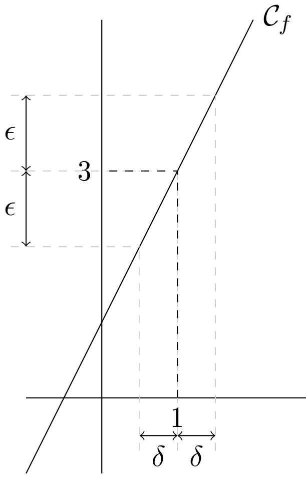
$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-l| \leq \epsilon$$

Exemples :

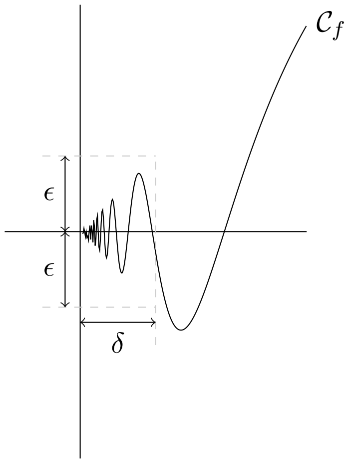
▷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Montrons que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$:
$\forall \epsilon > 0$, prenons $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$. Si $|x - 1| \leq \delta$, alors $1 - \dfrac{\epsilon}{2} \leq x \leq 1 + \dfrac{\epsilon}{2}$,
donc $2 - \epsilon + 1 \leq 2x + 1 \leq 2 + \epsilon + 1$, donc $-\epsilon \leq f(x) - 3 \leq \epsilon$, soit $|f(x) - 3| \leq \epsilon$.

▷ Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \sin \dfrac{6}{x}$. Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$:
$\forall \epsilon > 0$, prenons $\delta = \epsilon$. Si $|x - 0| \leq \delta$ alors $|x| \leq \epsilon$.

Or pour tout $x > 0$, $\left|\sin \dfrac{6}{x}\right| \leq 1$, donc $|f(x)| \leq |x|$, et donc $|f(x) - 0| \leq \epsilon$.



Limite de $f : x \mapsto 2x + 1$ en 1



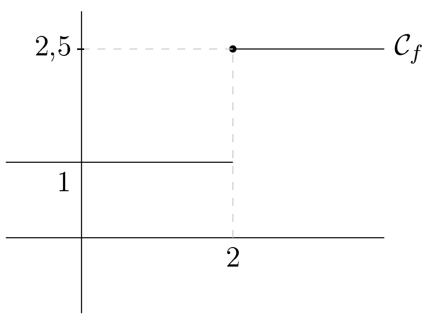
Limite de $f : x \mapsto x \sin \dfrac{6}{x}$ en 0

Contre-exemples :

▷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 2 \\ 2,5 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$

Montrons que f n'admet pas de limite en $a = 2$.

Pour $\epsilon = 1$, il est impossible de trouver un nombre réel l et un nombre $\delta > 0$ tels que :
$|x - 2| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq 1$, puisqu'il faudrait avoir à la fois $|1 - l| \leq 1$ et $|2,5 - l| \leq 1$.



f n'admet pas de limite en 2

▷ L'indicatrice de $\mathbb{Q}$, notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, n'admet de limite en aucun point de $\mathbb{R}$.

Définition 2 : Limite à gauche et à droite

Lorsque, dans la définition précédente, la fonction f est définie sur un intervalle du type :

- $]a,b[$: on dit que f admet une limite **à droite** en a et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l$.
- $]b,a[$: on dit que f admet une limite **à gauche** en a et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l$.

Exemple :

▷ Reprenons le premier contre-exemple ci-dessus : la fonction f admet une limite à droite en 2 et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = 2,5$, et cette limite est égale à $f(2)$. En revanche, f admet également une limite à gauche en 2, mais $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 1$: cette limite n'est pas égale à $f(2)$.

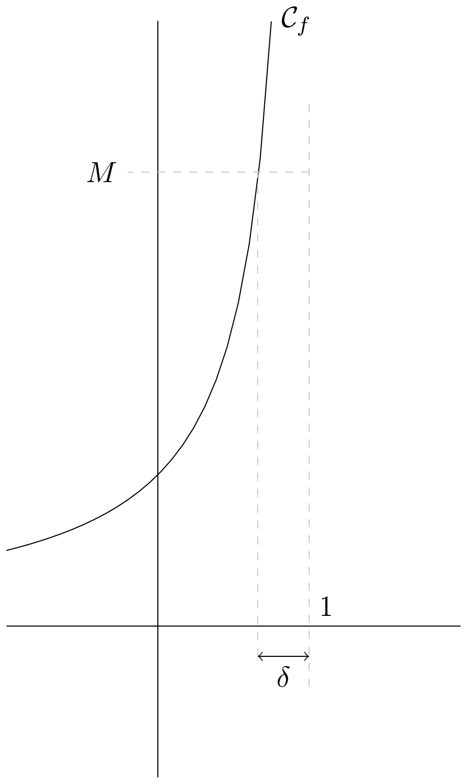
Moralité : ce n'est pas parce qu'une fonction f admet une limite à droite (ou à gauche) en a que cette limite est égale à $f(a)$ (dans le cas où f serait définie en a).

▷ La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet de limite ni à droite ni à gauche en 0.

Définition 3 : Limite infinie en un point

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I, et a un nombre réel appartenant à I ou une extrémité de I, on dit que f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$), ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$), lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I,\ |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M \text{ (resp. } f(x) \leq M)$$



Exemple :

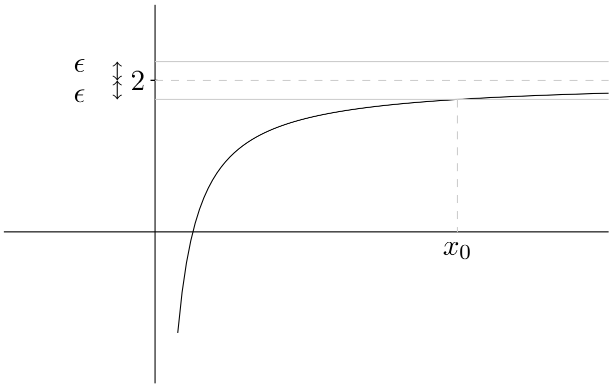
- ▷ Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Montrons que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$:
  $\forall M > 0$, prenons $\delta = \dfrac{1}{M}$. Si $|x-1| \leq \delta$,
  alors $1 - \dfrac{1}{M} \leq x < 1$ (l'intervalle de définition est $[0;1[$), donc $0 < 1 - x \leq \dfrac{1}{M}$,
  donc $f(x) \geq M$, car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Définition 4 : Limite finie à l'infini

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A[$), on dit que f admet pour limite l quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$), lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists x_0 > A\,(\text{resp. } x_0 < A), \quad x \geq x_0 \ (\text{resp. } x \leq x_0) \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

Exemple : Montrer que la fonction $f : x \mapsto 2 - \dfrac{1}{x}$, définie sur $]0,+\infty[$, tend vers 2 en $+\infty$.



Définition 5 : Limite infinie à l'infini

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A[$), on dit que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$), lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists x_0 > A\,(\text{resp. } x_0 < A), \quad x \geq x_0 \ (\text{resp. } x \leq x_0) \Rightarrow f(x) \geq M$$

II Théorèmes sur les limites de fonctions

Théorème 1 : Unicité de la limite

Une fonction admet au plus une limite, finie ou infinie, que ce soit en un point ou à l'infini.

Théorème 2

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I, et a un élément de I ou une extrémité de I (a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).
Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration :
Notons l la limite de f en a.
<u>Cas où a est un nombre réel</u> :
Soit $\epsilon > 0$ quelconque.
Alors $\exists \delta > 0$, $\forall x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[$, $|f(x) - l| \leq \epsilon$, c'est-à-dire que $l - \epsilon \leq f(x) \leq l + \epsilon$.
<u>Cas où $a = +\infty$</u> (idem en $-\infty$) :
Soit $\epsilon > 0$ quelconque.
Alors $\exists x_0$, $\forall x \in]x_0, +\infty[$, $|f(x) - l| \leq \epsilon$, c'est-à-dire que $l - \epsilon \leq f(x) \leq l + \epsilon$

Théorème 3 : Limites de fonctions et suites

Étant donnés :

- une fonction f définie sur un intervalle I, et a un élément ou une extrémité de I,
- (u_n) une suite convergente de nombres de I telle que $\lim u_n = a$,
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Alors la suite $f(u_n)$ converge et admet pour limite l.

Exemple :

▷ Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$. On a $\lim u_n = 0$ d'une part, et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ d'autre part, donc la suite $\left(\cos \dfrac{1}{n}\right)$ converge et $\lim \left(\cos \dfrac{1}{n}\right) = 1$

Remarque :

▷ On utilise notamment la contraposée de ce théorème pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.
<u>Exemple</u> : soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \cos x \times \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Considérons les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$.
On a $\lim u_n = 0$, $\lim v_n = 0$, $f(u_n) = \cos u_n$ et $f(v_n) = -\cos v_n$.
Ainsi $\lim f(u_n) = 1 \neq \lim f(v_n) = -1$. Donc f n'admet pas de limite en 0.

Théorème 4 : Limites de fonctions et inégalités

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage I de a telles que :

- $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$

Alors on a $l \leq l'$.

Théorème 5 : Théorèmes d'encadrement

Soient f, g et h trois fonctions définies dans un voisinage I de a telles que :

$$\forall x \in I,\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$, alors f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
- si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone (admis)

Étant donnée une fonction f monotone croissante (resp. décroissante) sur un intervalle $]a, b[$, où a peut être $-\infty$ et b peut être $+\infty$. Alors :

- f admet une limite à droite en a, finie si f est minorée (resp. majorée), et égale à $-\infty$ (resp. $+\infty$) sinon
- f admet une limite à gauche en b, finie si f est majorée (resp. minorée), et égale à $+\infty$ (resp. $-\infty$) sinon

III Continuité

Définition 6 : Fonction continue en un point

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I, et $a \in I$, on dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a égale à $f(a)$.

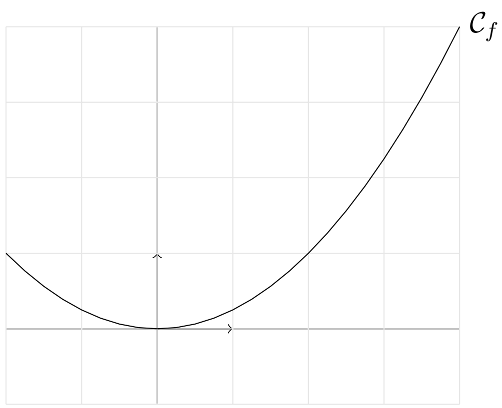
Exemple :

▷ La fonction $f : x \mapsto x \times \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, définie sur $\mathbb{R}$, est continue en 0 (et en aucun autre point).

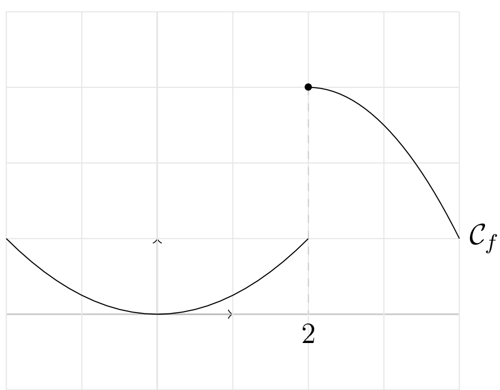
Définition 7 : Fonction continue sur un intervalle

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite continue sur l'intervalle I lorsqu'elle est continue en tout point a de l'intervalle I.

Exemples :



Fonction continue sur $[-2, 4]$



Fonction discontinue en $a = 2$

Théorème 7 : Continuité et opérations

• Toute combinaison linéaire, tout produit et tout quotient (dans la mesure où il est bien défini) de fonctions continues en un point a (resp. sur un intervalle I) est une fonction continue en a (resp. sur l'intervalle I).
• Fonction composée : soit g une fonction définie d'un intervalle I dans un intervalle J, et f une fonction définie sur l'intervalle J, si g est continue en a (resp. sur I) et f est continue en $b = g(a)$ (resp. sur J), alors $f \circ g$ est continue en a (resp. sur I).

Remarque :

- ▷ On utilise fréquemment ce théorème pour justifier qu'une fonction est continue, en s'appuyant sur la continuité des fonctions usuelles comme les fractions rationnelles, les fonctions trigonométriques, exponentielles, logarithmes, puissances, valeur absolue, toutes continues sur les intervalles où elles sont définies.
  Les seules fonctions usuelles qui ne sont pas continues sont la fonction partie entière et les fonctions indicatrices.

Définition 8 : Prolongement par continuité

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]a, b[$ qui admet une limite l en $a \in \mathbb{R}$,
Alors on peut prolonger par continuité la fonction f en a en décidant que l'image de a par la fonction f est l : $f(a) = l$.

Exemples :

- ▷ La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = t \sin \dfrac{1}{t}$ peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- ▷ La fonction f définie sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ peut être prolongée par continuité en 1 en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

IV Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

Théorème 8 : Fonctions continues et suites (cas particulier du théorème 3)

Étant donnés une fonction f définie sur un intervalle I, continue en $a \in I$, et (u_n) une suite de nombres de I de limite a.
Alors la suite $(f(u_n))$ converge et $\lim f(u_n) = f(a)$.

Théorème 9 : Théorème des valeurs intermédiaires

Étant donnés une fonction f continue sur un intervalle I, et a et b deux éléments de I,
Alors tout nombre m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par f.

Démonstration :
Plaçons-nous dans le cas où $a < b$ et $f(a) > f(b)$. Soit m un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
On construit deux suites (u_n) et (v_n) en définissant $u_0 = a$ et $v_0 = b$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \dfrac{u_n + v_n}{2}$: $\begin{cases} \text{si } f(w_n) \geq m, \text{ alors } u_{n+1} = w_n \text{ et } v_{n+1} = v_n \\ \text{si } f(w_n) < m, \text{ alors } u_{n+1} = u_n \text{ et } v_{n+1} = w_n \end{cases}$,
de sort que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \geq m$ et $f(v_n) < m$.
La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante, et on montre par récurrence que $|u_n - v_n| \leq \dfrac{|b - a|}{2^n}$, d'où $\lim(u_n - v_n) = 0$, donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Notons l leur limite commune. On a à la fois $f(l) \geq m$ et $f(l) \leq m$: donc $f(l) = l$.

Exemple :

- ▷ Montrons que l'équation $x \cos x = \dfrac{1}{2}$ possède une solution dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

La fonction $f : x \mapsto x\cos x$ est continue comme produit de fonctions continues sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
$f(-\pi) = \pi$, $f(\pi) = -\pi$, et $\frac{1}{2} \in [-\pi, \pi]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $x\cos x = \frac{1}{2}$ possède une solution dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (en fait elle en possède même trois).

Corollaire : Image d'un intervalle par une fonction continue

L'image d'un intervalle par une fonction continue est également un intervalle.

Théorème 10 (admis)

L'image d'un segment (intervalle de la forme $[a, b]$) par une fonction continue est un segment.
Autrement dit, une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 11 : Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f.

Démonstration :
Soit f une fonction continue et par exemple strictement croissante sur un intervalle I.
Elle est bien sûr surjective de I dans $f(I)$. Montrons qu'elle est également injective :
$\forall y \in f(I)$, soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Si l'on avait par exemple $x_1 < x_2$ alors on aurait $f(x_1) < f(x_2)$, ce qui est absurde. Idem pour $x_1 > x_2$. Donc finalement $x_1 = x_2$, c'est-à-dire que f est injective.
Donc f est bijective de I dans $f(I)$, et nous pouvons définir une application réciproque de $f(I)$ dans I notée f^{-1}. Montrons qu'elle est strictement croissante.
$\forall y_1, y_2 \in f(I)$, tels que $y_1 < y_2$, $\exists!\, x_1 \in I$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $\exists!\, x_2 \in I$ tel que $f(x_2) = y_2$.
Si l'on avait $x_1 \geq x_2$, alors on aurait $f(x_1) \geq f(x_2)$, ce qui est faux, donc $x_1 < x_2$, c'est-à-dire que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Donc f^{-1} est strictement croissante.
Reste à montrer qu'elle est continue en tout point b de $f(I)$.
Soit donc $b \in f(I)$ et $a = f^{-1}(b)$. Quel que soit $\epsilon > 0$, on note $b_1 = f(a-\epsilon)$ et $b_2 = f(a+\epsilon)$.
On a $b_1 < b < b_2$, donc il existe $\delta > 0$ tel que $b_1 < b-\delta < b < b+\delta < b_2$, et donc $\forall y \in f(I)$, tel que $|y - b| < \delta$, on a $b_1 < y < b_2$, et donc $a - \epsilon < f^{-1}(y) < a + \epsilon$.
(remarque : si $a - \epsilon$ ou $a + \epsilon$ n'appartient pas à I, on peut prendre une valeur de ϵ plus petite jusqu'à y parvenir, et si a est une extrémité de I, on ne considère selon le cas que le côté $a - \epsilon$ ou que le côté $a + \epsilon$).