

DEVOIR MAISON N° 14

Exercice 1 : Théorème des valeurs intermédiaires

1. Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle indiqué :

(a) $x^7 - x^2 + 1 = 0$ sur $[-2, 0]$.

(b) $\tan x = \frac{3}{2}x$ sur $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}[$.

(c) $\sqrt[3]{x^3 + 6x + 1} = 3x + 2$ sur \mathbb{R} .

2. (a) Montrer que l'équation $\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^5} = 0$ possède dans $]1, 2[$ une solution unique.

(b) Montrer que cette équation n'admet pas de solution dans les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]2, +\infty[$.

Exercice 2 : Continuité d'une fonction sur un intervalle

La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ? Soigner la rédaction.

a) $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{x^3+1} & \text{si } x \neq -1 \\ \frac{1}{3} & \text{sinon} \end{cases}$