Géométrie plane avec des nombres complexes

Exercice 1 : Formule du parallélogramme

On considère un parallélogramme ABCD, et on choisit un repère orthonormé dont l'origine soit A. On note z et z' les affixes respectives de B et D dans ce repère.

a) Quelle sont les affixe de A, de C, de $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$?

b) Montrer que $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 = 2\left(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2\right)$

Exercice 2

On considère dans le plan complexe d'origine O les points $\mathrm{A}(-4-2i)$, $\mathrm{B}(-1+i)$ et $\mathrm{C}(3+4i)$. Répondre en effectuant un calcul :

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et (OB) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 3

On considère dans le plan complexe d'origine O les points $\mathrm{A}(-2+2i)$ et $\mathrm{B}(4-i)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}\,(1-4i)$.

1. Faire une figure.
2. Donner l'affixe du point C image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
3. Donner l'affixe du point D tel que ACBD soit un parallélogramme.
4. ACBD est-il un carré ? Justifier par un calcul.
5. Quelle est la nature du triangle OBD ? Justifier par un calcul.

Exercice 4 : Droite d'Euler

1. Soient $\mathrm{A}(a)$ et $\mathrm{B}(b)$ deux points distincts du plan complexe d'origine notée O, et C le point tel que OACB soit un parallélogramme.
   (a) Quels sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ en fonction de a et de b ?
   (b) Montrer (géométriquement) que a et b ont des modules égaux si et seulement si $\dfrac{a+b}{a-b}$ est un nombre imaginaire pur.
2. On considère un triangle quelconque ABC et on place l'origine O du plan complexe au centre du cercle circonscrit à ce triangle. On note a, b, c les affixes des trois points A, B, C.
   (a) Quel est l'affixe g du centre de gravité G du triangle ABC ?

(b) Montrer en utilisant le résultat de la question 1.b) que le point H($a+b+c$) est l'orthocentre du triangle ABC.

(c) En déduire que le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre, et le centre de gravité d'un triangle sont alignés (ils forment ce que l'on appelle la « droite d'Euler »).

Exercice 5 : Nouvelle démonstration du théorème de Ptolémée

1. *Préliminaires*

   (a) Rappel : Quatre points A, B, C, D non alignés sont cocycliques si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)\quad[\pi]$. Faire une figure.

   (b) Pour deux vecteurs non nuls quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$, quelle est la relation entre les angles orientés $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{u},-\vec{v})$?

On considère un quadrilatère non aplati ABCD, et on note a, b, c, d les affixes des quatre sommets (distincts deux à deux).

2. Vérifier que $(b-a)(d-c)+(c-b)(d-a)=(c-a)(d-b)$.
3. Utiliser ce résultat pour montrer que AC.BD $\leq$ AB.CD + AD.BC.
4. On se place désormais dans le cas d'égalité AC.BD = AB.CD + AD.BC.

   (a) Expliquer pourquoi $\dfrac{(c-b)(d-a)}{(b-a)(d-c)}$ est alors un nombre réel positif.

   (b) En déduire que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BC}\right)=0\quad[2\pi]$

   (c) Conclure.

Exercice 6

Préciser à chaque fois l'ensemble des points M(z) qui vérifie la relation :

a) $|z|=2$; b) $|z+1-i|=3$; c) $|z-1|=|z-i|$; d) $\arg(z+1)=\dfrac{\pi}{2}\quad[\pi]$

e) $\arg\dfrac{z-1}{z+i}=0\quad[2\pi]$; f) $\dfrac{z-2}{z+i}\in\mathbb{R}$.

Exercice 7

On considère la transformation du plan complexe d'origine O qui à tout point M(z) associe le point M′(z') défini par $z'=(1+i)z$.

1. Faire une figure et placer les images des points A(1), B(2) et C($-1+i$).
2. Montrer que f est la composée d'une rotation de centre O et d'une homothétie de centre O dont on précisera l'angle pour l'une et le rapport pour l'autre.

3. Généraliser : pour tout nombre complexe non nul $re^{i\theta}$, quelle est la transformation du plan qui à tout point $\mathrm{M}(z)$ associe le point $\mathrm{M}'(z')$ défini par $z' = re^{i\theta}z$?

Exercice 8

Soient les deux points $\mathrm{A}(1)$ et $\mathrm{B}(-1)$ du plan complexe.
On considère la transformation qui à tout point $\mathrm{M}(z)$ distinct de A associe le point $\mathrm{M}'(z')$ défini par $z' = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$.

1. Montrer que $|z'| = 1$ et que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel.
2. En déduire une construction géométrique du point M′ à partir du point M.
3. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{\mathrm{AM'B}}$?

Résolution de l'équation $z^n = a$

Exercice 9 : Résoudre les équations et représenter géométriquement les solutions.

a) $z^4 = 1$; b) $z^4 = i$; c) $z^6 = -32 + 32i\sqrt{3}$

Exercice 10 : Trouver une racine évidente de l'équation, puis la résoudre.

a) $z^3 - z - 6 = 0$ b) $z^3 - iz^2 - z + i = 0$ c) $2z^3 + z^2 + 3z - i + 1 = 0$

Exercice 11 : Résoudre les équations, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $z^n = 1 - i\sqrt{3}$ b) $(1+z)^n + (1-z)^n = 0$ c) $\left(1+z^2\right)^n - (z-i)^n = 0$
d) $z^{2n} - 2z^n\cos(n\theta) + 1 = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$.