CHAPITRE 12

Nombres complexes II

Sommaire

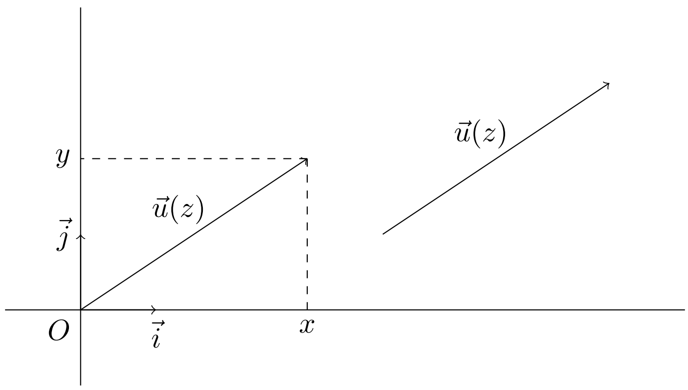
Au début du XIXe siècle, la représentation géométrique des nombres complexes, c'est-à-dire la compréhension que l'on peut associer ces nombres aux points du plan de manière efficiente, renforce l'acceptation de ces nombres, dont la réalité ne faisait jusqu'alors pas l'unanimité.

Dans tous le cours, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I Affixe d'un vecteur

Définition 1

On appelle affixe d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) le nombre complexe $z = x + iy$.
On a : $||\vec{u}|| = |z|$ et $\left(\vec{i}, \vec{u}\right) = \arg z \quad [2\pi]$



Remarque :

▷ Deux vecteurs du plan sont égaux ssi leurs affixes sont égaux.

Théorème 1

Pour tous points $A(a)$ et $B(b)$ du plan, l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b-a$.
En particulier, $||\overrightarrow{AB}|| = |b-a|$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg\ (b-a) \quad [2\pi]$

Théorème 2 : Alignement et orthogonalité

Étant donnés trois points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ du plan complexe distincts deux à deux,
On a : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg \left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)$.
En particulier :

- A, B, C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un nombre réel.
- L'angle $\widehat{BAC}$ est un angle droit ssi $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un nombre imaginaire pur.

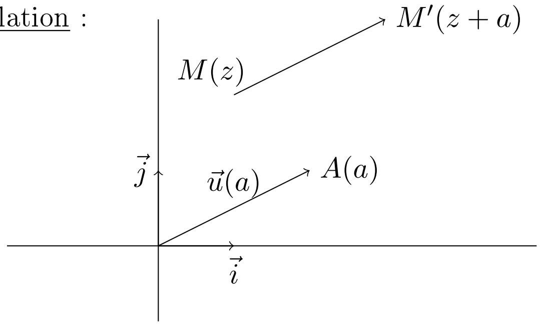
Démonstration :
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \vec{i}\right) + \left(\vec{i}, \overrightarrow{AC}\right) = -\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{i}, \overrightarrow{AC}\right) = -\arg\ (b-a) + \arg\ (c-a)$
$= \arg \left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$
A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow$ l'angle $\widehat{BAC}$ est nul ou plat $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$ ou $\pi \quad [2\pi]$
$\Leftrightarrow \arg \left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = 0 \quad [\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{c-a}{b-a}$ est un nombre réel.
l'angle $\widehat{BAC}$ est droit $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
$\Leftrightarrow \arg \left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{c-a}{b-a}$ est un nombre imaginaire pur.

II Nombres complexes et transformations géométriques

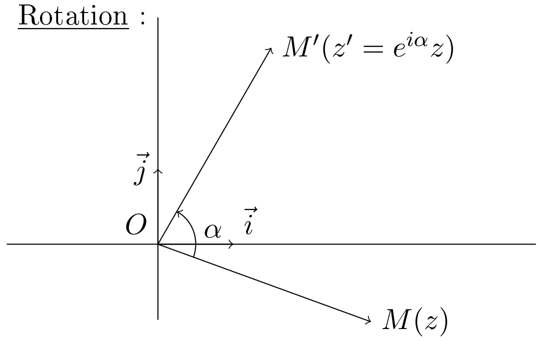
Théorème 3 : Translation

Soit a un nombre complexe quelconque et $\vec{u}$ le vecteur d'affixe a.
La transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = z + a$ est la translation de vecteur $\vec{u}$.

Translation :

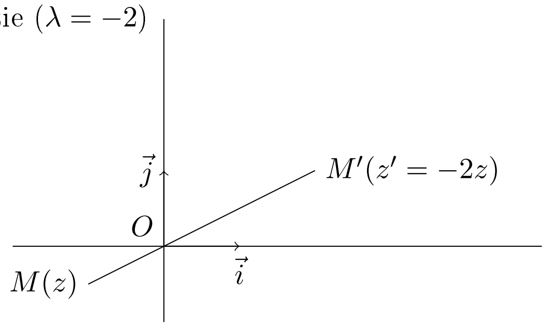


Rotation :

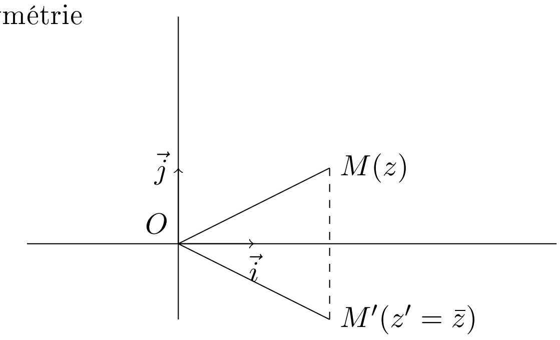


> **Théorème 4 : Rotation**
>
> Soit α un nombre réel quelconque.
> La transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = e^{i\alpha}z$ est la rotation de centre O et d'angle α.

Homothétie ($\lambda = -2$)



Symétrie



> **Théorème 5 : Homothétie**
>
> Étant donné un nombre réel non nul λ,
> la transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \lambda z$ est l'homothétie de centre O et de rapport λ.

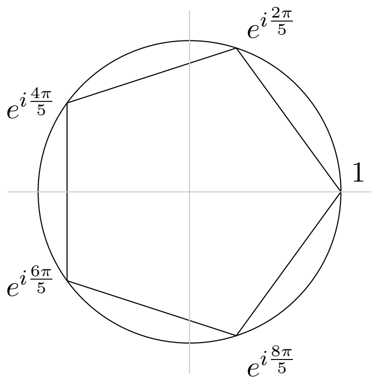
> **Théorème 6 : Symétrie**
>
> La transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(\bar{z})$ est la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.

III Résolutions de l'équation $z^n = a$

> **Théorème 7 : Racines n$^{\text{ème}}$ de l'unité**
>
> L'équation $z^n = 1$ possède n solutions distinctes égales à $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour k allant de 0 à $n-1$.
> L'ensemble de ces solutions est noté $\mathbb{U}_n = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$.

Démonstration :
Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{i\times 2k\pi} = \left(e^{i\times 2\pi}\right)^k = 1^k = 1$.
Donc ces n nombres distincts sont des racines de l'équation. Or nous verrons dans le chapitre sur les polynômes qu'une équation de degré n a exactement n racines dans $\mathbb{C}$, donc nous les avons toutes trouvées.

Exemple :



Les solution de l'équation $z^5 = 1$ sont :

$$\mathbb{U}_5 = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}$$

Théorème 8 : Cas général

L'équation $z^n = a$, avec $a \neq 0$, admet n racines distinctes de la forme :

$$r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

où r et α sont respectivement le module et un argument de a.

Exemple :

- Pour résoudre l'équation $z^3 = 8i$, on écrit $a = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $r = 8$, $r^{\frac{1}{3}} = 2$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Les solutions de l'équation sont $\left\{2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, 2e^{i\frac{9\pi}{6}}\right\}$

IV Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 2

Pour tout nombre complexe z, on définit l'exponentielle de z par :

$$e^z = e^{\text{Re }(z)} \times e^{i \text{ Im }(z)}$$

Remarques :

- La première partie $e^{\text{Re }(z)}$ est l'exponentielle d'un nombre réel telle que vue au lycée, et la seconde partie $e^{i \text{ Im }(z)}$ est le nombre complexe de module 1 : $\cos(\text{Im }(z)) + i \sin(\text{Im }(z))$.
- Cette notation est cohérente avec l'exponentielle que nous connaissons déjà. En effet, lorsque z est un nombre réel, $\text{Re }(z) = z$ et $\text{Im }(z) = 0$, donc l'exponentielle *réelle* et l'exponentielle *complexe* de z sont bien égales.

Exemples :

- $e^{2-i\pi} = e^2 \times e^{-i\pi} = -e^2$; $e^{3+i\frac{\pi}{4}} = e^3 \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.