Activité : Théorème de Napoléon

Dans le plan complexe, soit un triangle quelconque ABC décrit dans le sens horaire. On construit un triangle équilatéral sur chacun des côtés [AB], [BC], [CA] de ce triangle, vers l'extérieur du triangle, et on note G, H et K respectivement les centres de gravité de ces trois triangles.

1. Réaliser une figure, sur cette feuille ou sur un logiciel.
2. Conjecturer la nature du triangle GHK.
3. Justifier que B est l'image de A par la rotation de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
4. On en déduit que $b-g=j(a-g)$, où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   Établir deux autres relations de ce type dans les deux autres triangles équilatéraux.
5. En déduire les relations : $\begin{cases} (1-j)g = b - ja \\ (1-j)h = c - jb \\ (1-j)k = a - jc \end{cases}$
6. En déduire les relations : $\begin{cases} (1-j)(g-k) = -(1+j)a + b + jc \\ (1-j)(h-k) = -a - jb + (1+j)c \end{cases}$
7. Montrer que $1+j+j^2=0$ et utiliser ce résultat pour prouver que $g-k=(1+j)(h-k)$.
8. Que vaut $(1+j)$? Conclure.