Opérations sur les matrices

Exercice 1 : Somme et produit de matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, AB, BA, B^2 et enfin $A^2 + AB + BA + B^2$.
2. Calculer $A + B$ puis $(A+B)^2$. Comparer avec le résultat de la question précédente.

Exercice 2 : Compléter les matrices.

a) $2\begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 \\ \dots & -3 & 2 \\ -1 & 3 & \dots \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots \\ 1 & -3 & \dots \\ -1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & 5 & 1 \\ -3 & \dots & 11 \\ \dots & 9 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & \dots \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$

Inverse d'une matrice

Exercice 3

1. Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer D^{-1} et D^3.
2. Soit $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calculer E^{-1} et E^4.

Exercice 4

Déterminer si les matrices ci-dessous sont inversibles et le cas échéant donner leur inverse.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 6 & -5 & 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & -9 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Déterminer si les matrices triangulaires ci-dessous sont inversibles et le cas échéant donner leur inverse.

a) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix}6 & 4\\ -5 & -3\end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux nombres réels λ et μ tels que $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$.
2. En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1}

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix}2 & -7 & -5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -8 & -3\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer que $A^3 - 7A + 6I = 0$.
3. En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3. A est-elle inversible ?

En utilisant la formule du binôme, expliciter $(A+I)^n$ pour tout $n \geq 2$.

Problèmes

Exercice 9

1. Trouver toutes les matrices N de taille 2×2 telles que $N^2 = 0$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices M qui commutent avec N.
3. Soit $M = \begin{pmatrix}6 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de $(M+N)^n$ en fonction de n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 10

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3.
   Conjecturer l'expression de A^n pour tout entier n et la prouver au moyen d'un raisonnement par récurrence.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 et B^3.
   Conjecturer l'expression de B^n pour tout entier n et la prouver au moyen d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 11

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit PQ.
2. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
3. Vérifier la relation $AP = PD$.
4. Établir par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la matrice A^n sous forme explicite.

(Extrait de ESCP 2016)

Exercice 12

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On considère les matrices $S = \dfrac{A + A^T}{2}$ et $T = \dfrac{A - A^T}{2}$.

1. Calculer S et T lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, S est symétrique, T est antisymétrique et $A = S + T$.

Exercice 13

Soit A et B deux matrices symétriques de même taille.
Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 14

On considère : $A = \begin{pmatrix} 18 & 9 & -12 & -15 \\ -12 & -6 & 8 & 10 \\ 24 & 12 & -16 & -20 \\ 36 & 18 & -24 & -30 \end{pmatrix}$

1. On note $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
2. Déterminer une matrice ligne L pour laquelle : $A = CL$.
3. Calculer LC et en déduire une expression simple de A^n pour tout entier positif n.

Exercice 15

Soit j le complexe défini par $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Calculer A^4.

En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 16

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Donner l'expression générale de D^n pour tout entier naturel n.
4. Justifier que $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire l'expression générale de A^n.

Exercice 17

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
   (b) Calculer $B = P^{-1}AP$.
   (c) Exprimer A^n en fonction de P, B, P^{-1} et $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Calculer B^n puis A^n en fonction de n.

2. Soient (u_n) et (v_n) les suites vérifiant $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ et telles que $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 15u_n - 9v_n \end{cases}$

   On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

   (a) Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.

   (b) En déduire X_n en fonction de A, X_0 et n.

   (c) Exprimer alors le terme général des suites (u_n) et (v_n).

Matrices et systèmes

Exercice 18

Résoudre les systèmes en utilisant la notation matricielle et l'algorithme de Gauss Jordan.

a) $\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ 2x + y - z = 5 \\ -2x + y - 2z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y + z = 6 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ x - 8y + 5z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + z + t & = -2 \\ 3x - 3y + 3z + 2t & = -5 \\ x - y + z & = -1 \\ 5x - 5y + 5z + 7t & = -12 \end{cases}$

Exercice 19

Pour chaque système, montrer que le quadruplet P est une solution particulière du système, puis résoudre le système homogène et enfin donner la solution générale du système.

a) $\begin{cases} 3x - y + z - t = 5 \\ 2x + y + 2z + t = 6 \\ 4x - 3y - 3t = 4 \end{cases}$ et $P = (1, -1, 2, 1)$. b) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z - t = 8 \\ x - 4y + z + t = 0 \\ -x - y + 2z + t = -4 \\ -x - 6y + 5z + 3t = -8 \end{cases}$ et $P = (3, 1, -1, 2)$.

Exercice 20 : Inverser les matrices en appliquant la méthode du pivot de Gauss.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 6 & -5 & 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & -9 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 9 \\ 15 & 2 & 22 \end{pmatrix}$