CHAPITRE 11

Calcul matriciel

Sommaire

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Opérations sur les matrices

Définition 1

Une matrice A est un tableau de nombres de $\mathbb{K}$. On note a_{ij} le nombre de la ligne i et de la colonne j.
On note $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les matrices à n lignes et p colonnes.
On note E_{ij} la matrice élémentaire dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

Remarque : Combinaison linéaire

▷ Toute matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ est égale à $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} a_{ij}E_{ij}$.

Définition 2 : Combinaison linéaire de matrices

Pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, et pour tous nombres $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on définit la matrice $C = \lambda A + \mu B$ appartenant à $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ par :

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq p$$

Exemple :

▷ $2 \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -8 \\ -3 & -11 & -3 \end{pmatrix}$

Définition 3 : Produit de matrices

Étant données $A \in \mathscr{M}_{nk}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{kp}(\mathbb{K})$, le produit $C = A \times B$ est la matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par :

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj} \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq p$$

Exemple :

▷ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -9 & -3 \end{pmatrix}$

Remarques :

▷ On n'effectue le produit de deux matrices $A \times B$ qu'à cette condition que le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B (dans la suite, quand on écrit un produit de matrices, on considère implicitement que cette condition est réalisée).

▷ Le produit de matrices **n'est pas commutatif** :

par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

▷ Le produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle :

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

▷ Si X est une matrice colonne, le produit AX est une combinaison linéaire des colonnes $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ de A : $\quad AX = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_pA_p$

Théorème 1 : Bilinéarité et associativité du produit matriciel

Le produit de matrices est associatif :
$\forall A \in \mathscr{M}_{nk}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{kl}(\mathbb{K}), C \in \mathscr{M}_{lp}(\mathbb{K}), \quad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
Le produit de matrices est bilinéaire :
à droite : $\forall A \in \mathscr{M}_{nk}, \forall B, C \in \mathscr{M}_{kp}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad A \times (\lambda B + \mu C) = \lambda A \times B + \mu A \times C$
à gauche : $\forall A, B \in \mathscr{M}_{nk}, \forall C \in \mathscr{M}_{kp}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda A + \mu B) \times C = \lambda A \times C + \mu B \times C$

Théorème 2

Le produit de deux matrices élémentaires $E_{ij} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ par $E_{km} \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$ vaut $\delta_{jk}E_{im}$, avec $E_{im} \in \mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K})$, où le symbole de Kronecker δ_{jk} vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon.

Définition 4 : Matrice transposée

Étant donnée une matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle matrice **transposée** de A la matrice de $\mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$ notée A^T dont les coefficients sont $b_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j.

Exemple :

▷ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

Théorème 3 : Transposée et opérations

$\forall A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T,$
$\forall A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K}),\ (A \times B)^T = B^T \times A^T$

Démonstration :
Pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$, et $B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{R})$, et pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $1 \leq j \leq q$,
$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki}$ et $\left(B^T A^T\right)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{p} \left(B^T\right)_{ik}\left(A^T\right)_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}$
Donc on a bien $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.

II Matrices carrées

Définition 5 : Matrice carrée

Une matrice est dite **carrée** lorsqu'elle a autant de lignes que de colonnes.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.
La matrice carrée dont les seuls coefficients non nuls sont les coefficients de la diagonale, tous égaux à 1, s'appelle la **matrice identité**, notée I ou I_n.

Remarque :
▷ Pour toute matrice carrée A, on a $A \times I = I \times A = A$.

Définition 6 : Puissance d'une matrice carrée

Pour toute matrice carrée A, et pour tout entier naturel n, on définit la puissance $n^{\text{ème}}$ de A et on note A^n :

- la matrice identité lorsque $n = 0$ (par convention)
- le produit de n facteurs $A \times A \times \cdots \times A$ lorsque $n \geq 1$.

Théorème 4 : Formule du binôme

Pour toutes matrices A, B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Exemple :
▷ Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -11 \\ 2 & 6 & -12 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -30 \\ 2 & 4 & -10 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$ (N est « nilpotente »).

Donc $(N+I)^n = \binom{n}{0} N^0 I^n + \binom{n}{1} N^1 I^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 I^{n-2} = I + nN + \dfrac{n(n-1)}{2} N^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Définition 7 : Matrices diagonales et triangulaires

On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée dont tous les coefficients non diagonaux sont nuls.
On appelle **matrice triangulaire** supérieure (resp. inférieure) toute matrice dont les coefficients situés au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nuls.

Exemple :
▷ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale, $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, et $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est

triangulaire inférieure.

Théorème 5

Toute combinaison linéaire et tout produit de matrices diagonales est une matrice diagonale.
Toute combinaison linéaire et tout produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Définition 8 : Matrices symétriques et antisymétriques

Une matrice A est dite **symétrique** lorsque $A^T = A$, **antisymétrique** lorsque $A^T = -A$.
On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble de toutes les matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple :

▷ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Définition 9 : Inverse d'une matrice carrée

Étant données deux matrices carrées A et B telles que $A \times B = I$, on dit que A et B sont inverses l'une de l'autre, et on note $B = A^{-1}$.
Une matrice qui possède un inverse est dite **inversible**. On appelle groupe linéaire, et on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble de toutes les matrices carrées inversibles d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple :

▷ Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
On a $AB = I$, donc $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$.

Remarque :

▷ Les matrices carrées ne sont pas toutes inversibles (pour $n \geq 2$).

Théorème 6 : inverse d'un produit, d'une transposée

$\forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
$\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Démonstration :
$\forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $(AB) \times \left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = A \times I \times A^{-1} = A \times A^{-1} = I$
$\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^T \times \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1} \times A\right)^T = I^T = I$

Théorème 7 : Inverse d'une matrice diagonale ou triangulaire

Une matrice diagonale ou triangulaire est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Le cas échéant, l'inverse d'une matrice diagonale, triangulaire supérieure ou inférieure est respectivement diagonale, triangulaire supérieure ou inférieure.

III Matrices et systèmes

Définition 10 : Matrice associée à un système linéaire

Un système linéaire de n équations à p inconnues de la forme :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$$

où les coefficients a_{ij} et b_i sont des nombres réels ou complexes, et les x_j les inconnues du système, peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \text{ou } AX = B$$

avec $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = (b_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Les éventuelles solutions du système apparaissent alors sous la forme de matrices colonnes $X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})$.
Un système est dit **compatible** lorsqu'il admet au moins une solution.

Remarque :
- ▷ Le système ci-dessus est compatible ssi B est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Définition 11 : Système homogène associé

On appelle système homogène associé à un système linéaire le même système dont le second membre est égalé à 0 :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{array}\right.$$

Théorème 8 : Forme des solutions

Lorsque le système (S) est compatible, c'est-à-dire qu'il admet au moins une solution X_0, les solutions du système sont exactement de la forme $X_0 + Y$, où Y est une solution du système linéaire homogène associé.

Définition 12 : Matrice de transvection

On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $T = I + \lambda E_{ij}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.
Multiplier une matrice à gauche par T revient à ajouter à sa ligne i sa ligne j multipliée par λ.
Multiplier une matrice à droite par T revient à ajouter à sa colonne j sa colonne i multipliée par λ.
Une matrice de transvection est inversible, et son inverse est obtenu en remplaçant λ par $-\lambda$.

$$T = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \vdots & \\ & \ddots & & & \vdots & \\ & & 1 & & \lambda & \cdots \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Définition 13 : Matrice de transposition

On appelle matrice de transposition toute matrice P égale à la matrice unité dont les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ coefficients diagonaux sont déplacés aux positions (i,j) et (j,i).
Multiplier une matrice à gauche par P revient à permuter ses lignes i et j.
Multiplier une matrice à droite par P revient à permuter ses colonnes i et j.
Une matrice de transposition est inversible, et son inverse est elle-même.

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \quad & i & & j & \quad \end{array} \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{I} & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & \mathbf{I} & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \mathbf{I} \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}$$

Définition 14 : Matrice de dilatation

On appelle matrice de dilatation toute matrice D égale à la matrice unité dont un des coefficients diagonaux est remplacé par un nombre $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
Multiplier une matrice à gauche par D revient à multiplier sa ligne i par λ.
Multiplier une matrice à droite par D revient à multiplier sa colonne i par λ.
Une matrice de dilatation est inversible, et son inverse est obtenu en remplaçant λ par $\dfrac{1}{\lambda}$.

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & \cdots & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Par conséquent, résoudre un système revient à multiplier à gauche sa matrice associée par une succession de matrices associées aux opérations élémentaires sur les lignes.

Exemple :

Résolution d'un système	Opérations sur la matrice augmentée
$\begin{cases} 3x-7y+2z=5 \\ x-3y+2z=1 \end{cases}$	$S=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x-3y+2z=1 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 3x-7y+2z=5 \end{cases}$	$S_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
▷ $\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ \quad 2y-4z=2 & L_2-3L_1 \to L_2 \end{cases}$	$S_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} S_1=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ \quad y-2z=1 & \frac{1}{2}L_2 \to L_2 \end{cases}$	$S_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} S_2=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x \quad -4z=4 & L_1+3L_2 \to L_1 \\ \quad y-2z=1 \end{cases}$	$S_4=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Donc finalement $\mathscr{S} = \{(4+4z, 1+2z, z), z \in \mathbb{R}\}$

Méthode : Inversion d'une matrice

▷ Pour inverser une matrice A, l'idée consiste à transformer le système général $AX = B$ en un système équivalent $X = A^{-1}B$

Par exemple, soit à inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On lui associe le système :

$$\begin{cases} 2x + y + z = u \\ 3x + 2y + z = v \\ 4x + \quad\quad 3z = w \end{cases}, \text{ écrit sous la forme } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|l} 2 & 1 & 1 & L_2 - L_1 \to L_1 \\ 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 0 & 3 & \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$
On égalise le coefficient a_{11} à 1

$$\left|\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 0 & \\ 3 & 2 & 1 & L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ 4 & 0 & 3 & L_3 - 4L_1 \to L_3 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$
On fait apparaître des 0 dans le reste de la première colonne

$$\left|\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & -L_2 \to L_2 \\ 0 & -4 & 3 & \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{array}\right|$$
On égalise le coefficient a_{22} à 1

$$\left|\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & -4 & 3 & L_3 + 4L_2 \to L_3 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{array}\right|$$
On fait apparaître des 0 dans le reste de la 2^{e} colonne

$$\left|\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \to L_3 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{array}\right|$$
On égalise le coefficient a_{33} à 1

$$\left|\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & L_2 + L_3 \to L_2 \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & -1 \end{array}\right|$$
On égalise le reste des coefficients de la 3^{e} colonne à 0

$$\left|\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 0 & L_1 - L_2 \to L_1 \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ 8 & -4 & -1 \end{array}\right|$$
On égalise le reste des coefficients de la 2^{e} colonne à 0

$$\left|\begin{array}{ccc|} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} -6 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 8 & -4 & -1 \end{array}\right|$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Théorème 9 : Formule de l'inverse d'une matrice 2×2

Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et le cas échéant, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.