

En 1945, Patrick Leslie publie, dans la revue *Biometrika*, un article intitulé « On the use of matrices in certain population mathematics ». Il y développe un modèle pour décrire l'évolution temporelle du nombre de femelles dans des populations de souris et de rats. La motivation de cette étude était d'ordre pragmatique : la prolifération de ces rongeurs était, pendant la seconde guerre mondiale, un réel souci en raison des dégâts occasionnés par ces animaux au niveau des réserves alimentaires de la population anglaise.

Exemple

On s'intéresse à une population de souris femelles sachant que :

- chacune de ces souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie et à 8 femelles pendant sa deuxième année;
- 25% des souris survivent une deuxième année et aucune ne survit au-delà de deux an.

On distingue donc deux catégories de souris : les juvéniles âgées de moins d'un an et les adultes dont l'âge est compris entre un an et deux ans. Notons j_n le nombre de souris juvéniles, et a_n celui des adultes, au bout de n années. On considère que $a_0 = 0$.

1. Traduire les hypothèses ci-dessus sous forme de deux relations exprimant a_{n+1} et j_{n+1} en fonction de a_n et j_n .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = LV_n$, où L est une matrice à déterminer.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer P^{-1} puis calculer $P^{-1}LP$.
4. En déduire l'expression explicite de L^n .
5. En déduire les expressions de a_n et j_n en fonction de n .
6. Comment le nombre de souris va-t-il évoluer au fil des années?
7. Écrire en langage python une fonction `souris(j0, N)` qui détermine le nombre d'années nécessaire pour qu'une population initiale de j_0 souris juvéniles dépasse le nombre de N individus.

Application : Au bout de combien d'années 20 souris juvéniles auront-elles engendré une population de plus de un million d'individus?

Source : Bair, Jacques, Bulletin de l'APMEP, n°501, p. 527-533,
<https://www.apmep.fr/IMG/pdf/bairC.pdf>