DEVOIR MAISON N° 12

Exercice 1

Soit $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et de I_2.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$, et donner une expression de α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.
3. Exprimer α_{n+2} en fonction de α_{n+1} et α_n.
4. En déduire l'expression générale de A^n.
5. Application :
   Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$$
   Démontrer que ces suites convergent et calculer leurs limites.

Exercice 2

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\alpha) \\ -1 & 0 & \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer M^2 et M^3.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $A(x) = I_3 + xM + \frac{x^2}{2}M^2$.
   Comparer $A(x+y)$ et $A(x)A(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que $A(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}$ et déterminer $\left(A(x)\right)^{-1}$.