Exercice 1

On considère la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est défini et $u_n < 2$.
2. On pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$. Montrer que (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.
3. Donner une expression simple de v_n en fonction de n.
   En déduire une expression simple de u_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmético-géométrique et donner l'expression explicite de son terme général.
3. En déduire celle du terme général de la suite (u_n) puis déterminer son comportement asymptotique.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 3

Déterminer le terme général de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n$.

Exercice 4

On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) telles que : $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 3^n$.

1. Vérifier que la suite de terme général 3^n satisfait cette relation.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3^n$. Trouver une relation satisfaite par (v_n) et en déduire l'expression explicite de v_n.
3. En déduire celle de u_n.

Manipulation de la définition de la limite d'une suite

Exercice 5

Soit (u_n) une suite réelle. Traduire les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs :

1. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
2. La suite (u_n) n'est pas croissante.
3. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.

Exercice 6

En utilisant la définition de la limite, montrer que toute suite d'entiers naturels qui converge vers 0 est une suite stationnaire.

Exercice 7 : Théorème de Césaro

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite convergeant vers 0. On définit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$.
Soit ϵ un nombre réel strictement positif.

1. Justifier l'existence de $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq \mathrm{N}_1$, $|u_n| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ et d'un réel positif M tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n| \leq \mathrm{M}$.
2. En déduire qu'à partir d'un certain rang à préciser, $|v_n| \leq \dfrac{\mathrm{M}(\mathrm{N}_1+1)}{n+1} + \dfrac{\epsilon}{2}$.
3. En déduire que (v_n) converge vers 0.

Exercice 8

Soit (x_n) une suite telle que ses suites extraites (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent.
Montrer que la suite (x_n) converge.

Convergence ou divergence de suites

Exercice 9

Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants, et donner leur limite éventuelle :

a) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ b) $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$ c) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ d) $u_n = \dfrac{\sin n}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in]0;+\infty[$

e) $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$ f) $u_n = n^2+\sin n$ g) $u_n = (-1)^n + n$ h) $\dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$ i) $u_n = n^{-\ln n}$

Exercice 10

En utilisant le théorème des gendarmes, montrer que les suites de termes généraux suivants convergent vers un réel que l'on précisera :

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2+k}$ b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{\sqrt{n^4+k}}$ c) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, où $x\in\mathbb{R}$

Exercice 11 : Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $x \in \mathbb{R}$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$, et que la suite (x_n) converge vers x.

Exercice 12

Soit la suite (z_n) définie par $z_0 = \dfrac{2}{5}i$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{i}{2}z_n + 1$.

1. En utilisant la technique sur les suites arithmético-géométriques, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = l - \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{i}{2}\right)^n$, où l est un nombre complexe que l'on déterminera.
2. En déduire une majoration de $|z_n - l|$ puis que (z_n) converge vers ce nombre réel l.

Exercice 13 : Étudier la convergence des suites.

a) $u_n = \dfrac{i^n}{n^2}$ b) $v_n = \dfrac{n}{1+in}$ c) $w_n = e^{\frac{3n+i}{n}}$

Exercice 14

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$. On note I l'intervalle $[1;2]$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et est incluse dans l'intervalle I.
2. Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on pose : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $g = f \circ f$. Justifier que f est strictement décroissante sur I et que g est strictement croissante sur I.
3. Vérifier que $u_{n+2} = g(u_n)$ et en déduire que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes. Préciser leurs limites.
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 15

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ vn+1 = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$

1. Montrer que la suite définie par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique, préciser sa raison, et déterminer sa limite.
2. Montrer que (u_n) est croissante, que (v_n) est décroissante, puis que les deux suites convergent vers une même limite l.
3. On considère la suite définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que (t_n) est constante. En déduire la valeur de l.

Exercice 16 : Moyennes arithmétique et géométrique

Soient (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2 \quad v_0 = 1 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq v_n \leq u_n \leq 2$.
2. En déduire que (u_n) est décroissante et que (v_n) est croissante.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(u_n - v_n)^2}{\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}\right)^2}$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{8}(u_n - v_n)$

   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - v_n \leq \left(\dfrac{1}{8}\right)^n$.
4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 17

On considère la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.
Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge.

Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 18 : Signe de $f(x) - x$

Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.
   Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x \leq 0$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante et positive.
3. En déduire que (u_n) converge vers un réel l que l'on précisera.
4. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $u_{n+1} = u_0 e^{-S_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que (S_n) admet une limite que l'on précisera.

Exercice 19 : Intervalle stable

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}$.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x + x^2}{2}$.
   Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
2. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0,1]$.

3. Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.

Exercice 20

Soit la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n > 0$ et que (u_n) est bien définie.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 21

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(u_n^3 - 1\right)$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 1)$.

1. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) \in [-1; 1]$.
   En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1, 1]$.
2. Vérifier que f est croissante sur $[-1, 1]$.
   En déduire par récurrence que (u_n) est décroissante.
3. Montrer que (u_n) converge vers un réel l et vérifier que $f(l) = l$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leq \frac{3}{5}|un - l|$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$.
5. Déterminer un entier n_0 pour lequel u_{n_0} est une valeur approchée de l à la précision 10^{-2}.
   En déduire une valeur approchée de l à la précision 10^{-2}.