CHAPITRE 10

Suites numériques

Sommaire

Une suite est une famille de nombres réels numérotés par les entiers naturels à partir d'un premier rang n_0. On écrit les termes successifs u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, etc., à l'infini. Le terme d'indice n est noté u_n.

Exemple :

▷ $u_n = \sqrt{(n-1)(n-2)}$ définie à partir de l'indice $n = 2$: $u_2 = 0$, $u_3 = \sqrt{2}$, etc.

Remarques :

▷ On peut également considérer une suite comme une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1 : Modes de génération d'une suite

Nous rencontrerons trois façons de définir une suite :

— Explicite : on donne l'algorithme de calcul du $n^{\text{ième}}$ terme.
ex : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$.

— Implicite : on caractérise le $n^{\text{ième}}$ terme.
ex : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution positive de l'équation $x^n + x - 1 = 0$.

— Par récurrence : on donne la valeur du (des) premier(s) terme(s) et une relation qui permet de calculer tous les termes suivants.
ex : La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Définition 2 : Monotonie

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$
Une suite est dite **monotone** si elle est croissante ou bien décroissante.

Exemple :

▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ n'est ni croissante ni décroissante.

▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$ est croissante.

Définition 3

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **majorée** lorsque : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$.
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **minorée** lorsque : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m$.
Une suite est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **stationnaire** lorsque : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0}$.

Exemples :

- ▷ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2 - 1$ est minorée par -1.
- ▷ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 1 - 2n$ est majorée par 1.
- ▷ $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = \dfrac{1}{1+n^2}$ est bornée, car elle est à la fois minorée par 0 et majorée par 1.

Remarque :

- ▷ Une suite croissante est minorée, et une suite décroissante est majorée.
- ▷ Une suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée.

I Suites récurrentes

Définition 4 : Suites arithmétiques et géométriques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** de raison r lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$.
Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** de raison q lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = q \times v_n$.

Théorème 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison r. Alors $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_k + (n-k) \times r$
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q. Alors $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_k \times q^{n-k}$

Méthode : Exprimer le terme général d'une suite arithmético-géométrique :

- ▷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$
  On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$, où α est un nombre réel que l'on cherche à déterminer de manière que la suite (v_n) soit une suite géométrique de raison 3.
  On doit donc avoir pour tout entier naturel n :
  $v_{n+1} = 3v_n = 3(u_n - \alpha) = 3u_n - 3\alpha$ et à la fois $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 3u_n - 2 - \alpha$.
  d'où nécessairement $-3\alpha = -2 - \alpha$, soit $\alpha = 1$.
  Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \alpha = -1 - 1 = -2$, donc $v_n = v_0 \times 3^n = -2 \times 3^n$.
  Et par conséquent $u_n = v_n + \alpha = 1 - 2 \times 3^n$.

Définition 5 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont deux nombres réels non nuls.

Exemple :

- ▷ La suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 avec $a = 1$ et $b = 1$.

Théorème 2 : Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

On considère l'équation dite caractéristique $r^2 = ar + b$.

- Si l'équation possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors la suite (u_n) est de la forme $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
- Si l'équation possède une seule racine $r_0 = \frac{a}{2}$, alors la suite (u_n) est de la forme $u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n$
- Si l'équation possède deux racines complexes conjuguées de la forme $re^{i\alpha}$ et $re^{-i\alpha}$, alors la suite (u_n) est de la forme $u_n = \lambda r^n \cos(n\alpha) + \mu r^n \sin(n\alpha)$

où λ et μ sont deux nombres réels déterminés par les valeurs de u_0 et de u_1.

Exemple :

▷ Reprenons la suite de Fibonacci. L'équation caractéristique est $r^2 = r + 1$, elle possède deux racines, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Donc $u_n = \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Pour déterminer λ et μ, on résout le système : $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$

On aboutit à $\lambda = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ et $\mu = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$.

Donc, pour tout entier n, $u_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

II Limite d'une suite réelle

Définition 6 : Limite finie

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite converger vers le nombre l lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{pour tout } n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \epsilon$$

l est appelé la limite de la suite (u_n) et on écrit $\lim u_n = l$.

Définition 7 : Limite infinie

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite tendre vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{pour tout } n \geq n_0, \quad u_n \geq M \text{ (resp. } u_n \leq M)$$

Dans ce cas la suite (u_n) est bien sûr divergente et l'on écrit $\lim u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Théorème 3 : Unicité de la limite

Une suite convergente admet une seule limite.

Démonstration :
Procédons par l'absurde : soit (u_n) une suite qui converge à la fois vers l et vers l', où $l > l'$. Prenons $\epsilon = \dfrac{|l-l'|}{3}$. Alors $\exists n_1, \quad \text{pour tout } n \geq n_0, \quad |u_n - l| < \dfrac{|l-l'|}{3}$
et $\exists n_2, \quad \text{pour tout } n \geq n_0, \quad |u_n - l'| < \dfrac{|l-l'|}{3}$
Donc $|l-l'| \leq |l-u_n| + |u_n - l'| \leq \dfrac{|l-l'|}{3} + \dfrac{|l-l'|}{3} < |l-l'|$, d'où la contradiction.

Théorème 4 : Opérations sur les limites

Pour toutes suites convergentes (u_n) et (v_n), de limites respectives l et l' :

- pour tous nombres réels λ et μ, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente de limite $\lambda l + \mu l'$
- la suite $(u_n v_n)$ est convergente de limite ll'
- si la suite (v_n) ne s'annule pas, et ne tend par vers 0, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente de limite $\dfrac{l}{l'}$

Exemple :

▷ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{2 - \frac{1}{n}}{e^{-n} + 3}$ est convergente de limite $\dfrac{2}{3}$.

Théorème 5 : Limites et inégalités

Soit (u_n) une suite convergente de limite l.
Si $\exists n_0, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq M, \quad \text{alors} \quad l \leq M.$
Si $\exists n_0, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq m, \quad \text{alors} \quad l \geq m.$

Théorème 6 : Théorèmes des gendarmes

Étant données trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que :

- $\exists n_0, \quad \forall n \geq n_0 \quad v_n \leq u_n \leq w_n$
- les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes de même limite l

Alors la suite (u_n) est également convergente, et sa limite est l.

Théorème 7 : Avec un seul gendarme

À gauche : étant données deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

- $\exists n_0, \quad \forall n \geq n_0 \quad v_n \leq u_n$
- $\lim v_n = +\infty$

Alors la suite (u_n) diverge,
et $\lim u_n = +\infty$

À droite : étant données deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

- $\exists n_0, \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq v_n$
- $\lim v_n = -\infty$

Alors la suite (u_n) diverge,
et $\lim u_n = -\infty$

Théorème 8

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration :
Soit (u_n) une suite convergente et l sa limite.
Pour $\epsilon = 1, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad$ pour tout $n \geq n_0, \quad l-1 \leq u_n \leq l+1$
Soit $M = \max\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, |l-1|, |l+1|\}$: M est un majorant de $(|u_n|)$, donc (u_n) est bornée.

Théorème 9 : Théorème de la limite monotone (admis)

Toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exemple :

▷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$
On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
Or la fonction $x \mapsto \sqrt{x} - x$ est négative sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
Donc la suite (u_n) est décroissante sur cet intervalle. Or elle est minorée par 1.
Donc la suite (u_n) est convergente. Notons l sa limite. La relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ donne par passage à la limite $l = \sqrt{l}$, soit $l = 0$ ou 1. Mais comme (u_n) est minorée par 1, on doit avoir $l \geq 1$, et donc finalement $l = 1$ et $\lim u_n = 1$.

Définition 8 : Suite adjacentes

Deux suites (a_n) et (b_n) sont dites **adjacentes** lorsque :

- (a_n) est croissante
- (b_n) est décroissante
- $\lim(b_n - a_n) = 0$

Théorème 10

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Exemple :

▷ On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n\,.\,n!}$
Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes et en déduire que (u_n) converge (en fait sa limite est e).

Définition 9 : Suite extraite

Étant donnée une suite (u_n), on appelle suite extraite de (u_n) toute suite de la forme $(u_{\phi(n)})$, où ϕ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Théorème 11

Pour toute suite (u_n) convergente, toute suite extraite est également convergente et possède la même limite.

Remarque :
▷ Nous utiliserons surtout la propriété réciproque : si on peut trouver une suite extraite de la suite (u_n) qui soit divergente, alors la suite (u_n) est elle-même divergente.

III Suites de nombres complexes

On peut s'intéresser de la même façon à des suites de nombres complexes.

Définition 10 : Limite d'une suite de nombres complexes

Une suite (z_n) de nombres complexes est dite converger vers le nombre complexe ζ lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{pour tout } n \geq n_0, \quad |z_n - \zeta| \leq \epsilon$$

Exemple :

- ▷ On définit la suite (z_n) par $z_n = 1 - \dfrac{1}{n} + i\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Cette suite est convergente et $\lim z_n = 1 + i$.
  En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n - (1+i)| = \left|-\dfrac{1}{n} + \dfrac{i}{n}\right| \leq \dfrac{2}{n}$ et $\lim \dfrac{2}{n} = 0$.

Définition 11 : Suite bornée

On dit qu'une suite complexe (z_n) est bornée lorsque la suite $(|z_n|)$ des modules des termes de la suite est elle-même bornée.

Remarques :

- ▷ De même qu'avec les suites réelles, toute suite complexe convergente est bornée.
- ▷ Le théorème 4 concernant les limites et les opérations reste valable pour les suites complexes.