On appelle fraction continue simple une fraction du type :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{N-1} + \cfrac{1}{a_N}}}, \qquad \text{où } a_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall n \geq 1,\ a_n \in \mathbb{N}$$

Pour simplifier, on écrit ce nombre sous la forme $[a_0, a_1, \ldots, a_N]$.

1. Donner la forme irréductible des fractions continues $[1,2,3,4]$ et $[4,2,1,2]$.
2. L'algorithme d'Euclide permet de déterminer les quotients de la fraction continue égale à un nombre rationnel :

   $$\begin{aligned} 35 &= \mathbf{4} \times 8 + 3 \\ 8 &= \mathbf{2} \times 3 + 2 \\ 3 &= \mathbf{1} \times 2 + 1 \\ 2 &= \mathbf{2} \times 1 + 0 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \frac{35}{8} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

   Donner, en utilisant l'algorithme d'Euclide, la fraction continue égale à $\frac{99}{26}$.

On définit les suites $(p_n)_{n\geq -2}$ et $(q_n)_{n\geq -2}$ par :

$$\begin{array}{llll} p_{-2} = 0 & p_{-1} = 1 & \text{et} & \forall n \in \mathbb{N},\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_{-2} = 1 & q_{-1} = 0 & \text{et} & \forall n \in \mathbb{N},\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{array}$$

On peut démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

Les fractions $\frac{p_n}{q_n}$ sont appelées les « réduites » de la fraction continue.

3. Utiliser ces relations pour déterminer les réduites de la fraction continue $[1,2,2,2,2]$ en complétant le tableau ci-dessous :

a_n			1	2	2	2	2
p_n	0	1					
q_n	1	0					

4. On s'intéresse à la fraction continue infinie $x = [1,1,1,\ldots]$.
   (a) Vérifier que l'on a alors $x = 1 + \frac{1}{x}$.
   (b) En déduire la valeur de x (c'est le « nombre d'or »).
5. Quelle est la fraction continue infinie égale à $\sqrt{2}$?