

Exercice 1 : Algorithme de Héron pour approcher une racine carrée

Pour approcher la racine carrée d'un nombre positif a , la méthode de Héron consiste à construire une suite de rectangles d'aire a dont un des côtés est la moyenne arithmétique des deux côtés du rectangle précédent. On peut partir par exemple du rectangle de côtés de longueurs 1 et a .

1. Montrer que les côtés c_n des rectangles successifs vérifient :
$$\begin{cases} c_1 = a \\ \forall n \geq 1, c_{n+1} = \frac{1}{2} \left(c_n + \frac{a}{c_n} \right) \end{cases}$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $c_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(c_n - \sqrt{a})^2}{2c_n}$.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $c_n \geq \sqrt{a}$

4. En déduire que :

(a) (u_n) est convergente;

(b) pour tout $n \geq 2$, $0 \leq c_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(c_n - \sqrt{a})^2$

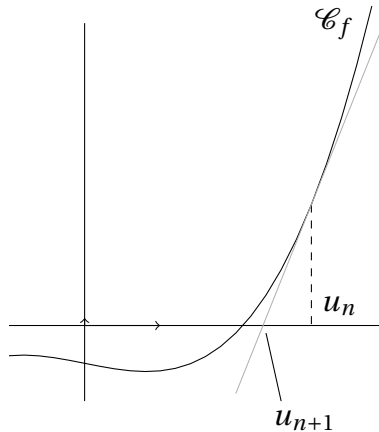
On parle de convergence quadratique.

5. Écrire une fonction `heron(a, n)` en langage python qui prend en argument les valeurs de a et de n et qui retourne la valeur de c_n .

6. Tester cette fonction avec $a = 10$: à partir de combien d'itérations obtient-on la valeur approchée $\sqrt{10} \approx 1,3162277660168379$?

Exercice 2 : Méthode de Newton-Raphson pour approcher la solution d'une équation

La méthode de Newton-Raphson, pour approcher une solution d'une équation du type $f(x) = 0$, consiste à remplacer à chaque étape la fonction f par une approximation affine.



1. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u_n et déterminer en fonction de u_n l'abscisse u_{n+1} du point où cette tangente recoupe l'axe des abscisses.
2. Écrire une fonction `newton(u1, n)` en langage python qui prend en argument les valeurs de u_1 et de n et qui retourne la valeur de u_n (on suppose que des fonctions f et $fprime$ ont été préalablement définies).
3. Appliquer cet algorithme pour donner une valeur approchée de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$. Combien faut-il d'itérations, en partant de la valeur $u_1 = 2$, pour obtenir la valeur approchée donnée par Newton de 2,094 551 48?