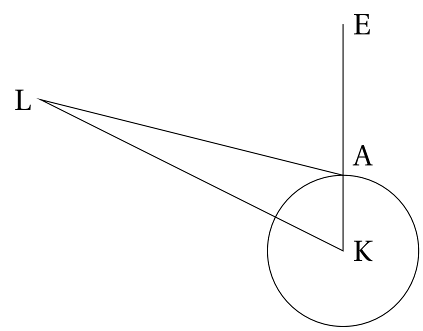
Exercice 1 : Calculer des distances inaccessibles.

1. On considère un triangle ABC quelconque.
   (a) Montrer que l'aire de ABC est égale à $\frac{1}{2}\mathrm{AB.AC}\sin\widehat{\mathrm{A}}$
   (b) En calculant l'aire de ABC de deux autres manières différentes, en déduire que :
$$\frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{\mathrm{BC}}=\frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{\mathrm{CA}}=\frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{\mathrm{AB}}$$
2. *Application* :
   Pour calculer la distance entre la terre et la lune, Ptolémée mesure en un point A de la terre l'élévation de la lune dans le ciel et trouve $\widehat{\mathrm{EAL}}=50°55'$. Par ailleurs, il sait par les tables astronomiques que l'élévation de la lune à la verticale de la terre est $\widehat{\mathrm{AKL}}=49°48'$. Il trouve avec ces mesures que la distance entre la terre et la lune est de égale à 39 fois et trois quart le rayon terrestre. Et vous ?



Exercice 2 : Tracer un cercle trigonométrique et placer les mesures d'angles données.

a) $\mathrm{A}=-\frac{3\pi}{4}$; b) $\mathrm{B}=\frac{5\pi}{3}$; c) $\mathrm{C}=\frac{9\pi}{4}$; d) $\mathrm{D}=\frac{7\pi}{6}$; e) $\mathrm{E}=-\pi$; f) $\mathrm{F}=-\frac{3\pi}{2}$.

Exercice 3 : Tangente d'une somme

Pour tous nombres réels a et b distincts de $\frac{\pi}{2}[\pi]$, et tels que $a+b\neq\frac{\pi}{2}[\pi]$, exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et de $\tan b$.

Exercice 4 : Donner les valeurs exactes des expressions.

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; b) $\cos\frac{4\pi}{3}$; c) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; d) $\cos(5\pi)$; e) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; f) $\sin\frac{11\pi}{6}$;
g) $\cos\frac{5\pi}{2}$; h) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; i) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; j) $\sin(3\pi)$; k) $\cos(4\pi)$; l) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

Exercice 5 : Retrouver une mesure de l'angle x

a) $\begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$

Exercice 6 : Résoudre des équations trigonométriques.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ b) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\tan x = -1$

d) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ e) $\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sin x$ f) $3\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations.

a) $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}$; b) $\cos^2 x = 1$; c) $\cos(2x) = \cos x$; d) $\cos(2x) = \sin x$;

e) $\cos(2x) = \sin x + 1$; f) $\sin^2 x = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cos x$; g) $1 + \cos x + \sin x = 0$

Exercice 8 : Résoudre des inéquations trigonométriques

1. Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ l'inéquation $\cos x \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $\sin x \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 9 : Calcul de nouvelles lignes trigonométriques

1. (a) Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
   (b) En déduire $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.
2. (a) Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.
   (b) En déduire $\cos\dfrac{5\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{8}$.
3. Déduire des questions précédentes $\cos\dfrac{5\pi}{24}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{24}$.

Exercice 10 : Calcul du cosinus et du sinus de $\dfrac{\pi}{5}$.

1. Première démonstration algébrique

(a) Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$.

(b) En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation du cinquième degré :

$$16A^5 - 20A^3 + 5A = 0$$

(c) Résoudre cette équation et en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

(d) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

2. Deuxième méthode avec deux inconnues. On pose :

$$\begin{cases} x = \cos\frac{\pi}{5} \\ y = \sin\frac{\pi}{5} \end{cases}$$

(a) Exprimer $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{3\pi}{5}$ en fonction de x et de y.

(b) Placer approximativement $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{5}$ sur le cercle trigonométrique et en déduire que l'on a nécessairement $\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5}$.

(c) En déduire les valeurs de x et de y.

3. Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas.

(a) Justifier que le côté d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon r est égal à $2r\sin\frac{\pi}{5}$.

(b) Tracer un cercle. Noter O son centre, r son rayon, $[AA']$ un diamètre, I le point du cercle tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}\right) = \frac{\pi}{2}$, et enfin H le milieu de $[OA']$. Le cercle de centre H passant par I recoupe le segment $[OA]$ en K.

(c) Montrer que le segment IK a pour longueur le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle.

(d) Tracer ce pentagone à la règle et au compas.

Exercice 11 : Un algorithme pour calculer cos (0.75°) et sin (0.75°).

1. Exprimer, pour tout nombre réel x, $\cos\frac{x}{2}$ et $\sin\frac{x}{2}$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. Rappeler les valeurs exactes des cosinus et sinus de 30° et de 36° et en déduire celles des cosinus et sinus de 6°.
3. En utilisant les deux questions précédentes, écrire un algorithme qui permet de trouver cos (0.75°) et sin (0.75°).

Exercice 12 : Encore une relation trigonométrique

Montrer que pour tous nombres réels a et b, $\cos^2(a-b)+\sin^2(a+b)=1+\sin(2a)\sin(2b)$

Exercice 13 : Transformer sous la forme $A\cos(t-\varphi)$.

a) $-3\sqrt{3}\cos t+3\sin t$ b) $-4\cos t$ c) $\dfrac{1}{4}\cos t+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin t$ d) $5\sin t$
e) $-5\sqrt{2}\cos t-5\sqrt{2}\sin t$ f) $\cos x+\sin x$

Exercice 14 : Transformer en somme.

a) $\cos x\times\cos(3x)$ b) $\sin(2x)\times\cos(3x)$ c) $\sin(x)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Exercice 15 : Transformer en produit.

a) $\cos(2x)+\cos(3x)$ b) $1+\cos(2x)$ c) $\sin x-\sin(2x)$