CHAPITRE 1

Trigonométrie

Sommaire

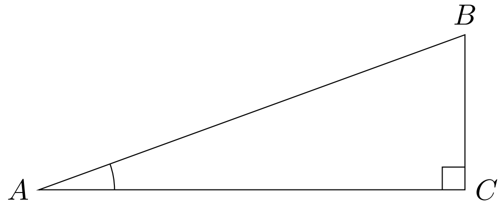
La trigonométrie est une science très ancienne, son invention est liée au développement des calculs astronomiques. On trouve de premiers calculs de corde en Inde (VIII^e s. av. J.-C.) et de premières tables trigonométriques en Grèce Antique (II^e s. av. J.-C.). Ptolémée (II^e s.) établit une table des cordes tous les demi degrés.
La trigonométrie est la science de la mesure dans le triangle : étant donnée trois grandeurs parmi les trois angles et les trois côtés d'un triangle, comment trouver les trois autres ?

I Trigonométrie du triangle rectangle

Définition 1

Dans un triangle ABC rectangle en C, on définit :

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}, \qquad \sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}, \qquad \tan\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$$



Exemple :

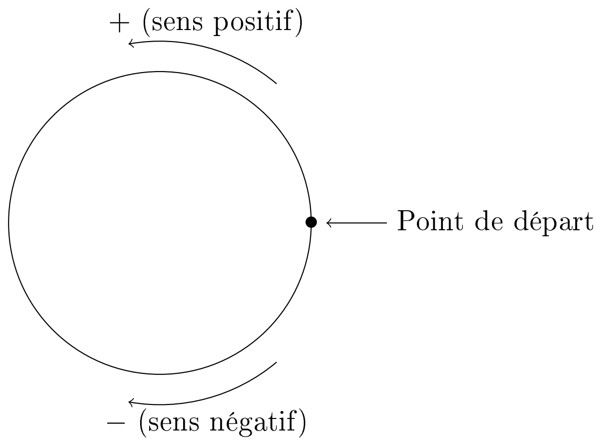
▷ Sur la figure ci-dessus, $AB = 6$ et $\hat{A} = 20°$.
Par conséquent, $BC = 6\sin 20° \approx 2,05$ et $AC = 6\cos 20° \approx 3,64$.

II Cercle trigonométrique

1 Mesure des angles en radians

Définition 2 : Cercle trigonométrique

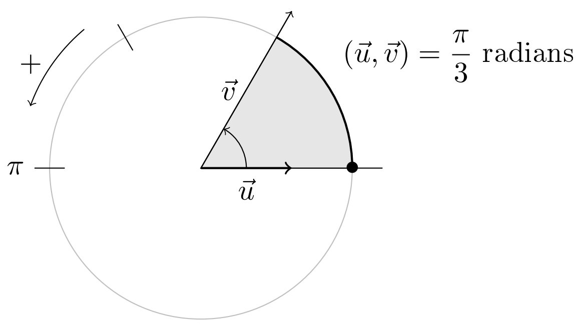
Pour mesurer la grandeur d'un angle orienté, déterminé par deux vecteurs non nuls, on utilise en mathématiques un cercle de rayon 1, muni d'un point de départ et d'un sens de parcours positif, que l'on appelle cercle trigonométrique.

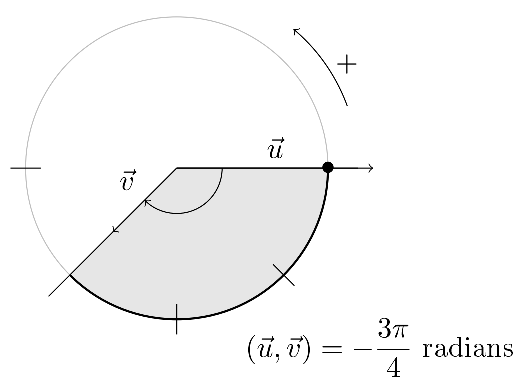


Définition 3 : Mesure d'un angle en radians

Un angle orienté de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ placé au centre du cercle trigonométrique est mesuré en radians par la longueur de l'arc de cercle qu'il intercepte, assortie d'un signe + ou − selon le sens de parcours de ce cercle.

Le périmètre d'un cercle de rayon 1 vaut 2π, donc sa moitié vaut π, son quart $\frac{\pi}{2}$, etc.





Remarque :

▷ Un angle orienté possède une infinité de mesures en radians : par exemple, $-\pi$, π, 3π mesurent le même angle.

Théorème 1 : Congruence

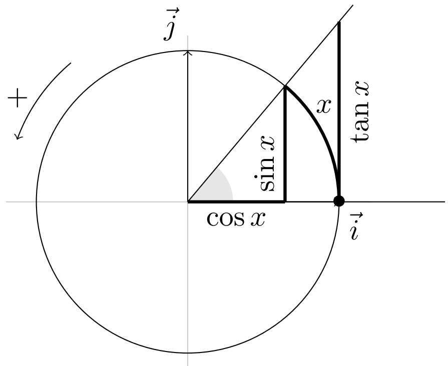
Deux nombres réels x et x' sont deux mesures du même angle orienté si et seulement si il existe un nombre entier relatif k tel que $x' = x + 2k\pi$. On dit que x' est **congru** à x modulo 2π et on écrit $x' = x\,[2\pi]$.

2 Lignes trigonométriques dans le cercle

On considère dans la suite de ce cours que le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On peut alors choisir le sens positif de manière que $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = +\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, et on dit que le repère est **direct**.

Définition 4 : Lignes trigonométriques

On utilise le cercle trigonométrique pour associer à un angle différentes lignes rectilignes, plus faciles à employer que des arcs de cercles. Les trois plus couramment utilisées à l'heure actuelle sont le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle :



Remarques :

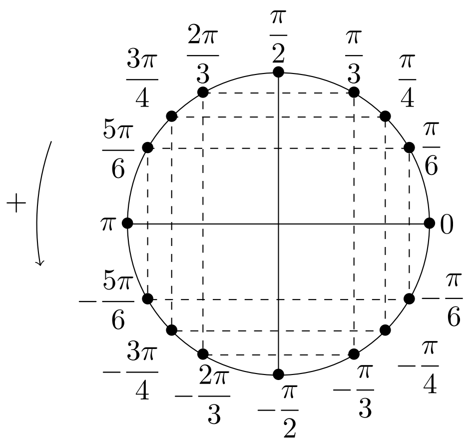
▷ Le théorème de Thalès appliqué à la figure ci-dessus donne : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, relation valable pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

▷ Le théorème de Pythagore donne quant à lui : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

▷ Enfin, pour tout nombre réel x, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

3 Angles remarquables

Des raisonnements élémentaires de géométrie nous permettent de déterminer le cosinus, le sinus et la tangente de certains angles particuliers, dits « remarquables » :



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

Exemples :

▷ $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice :

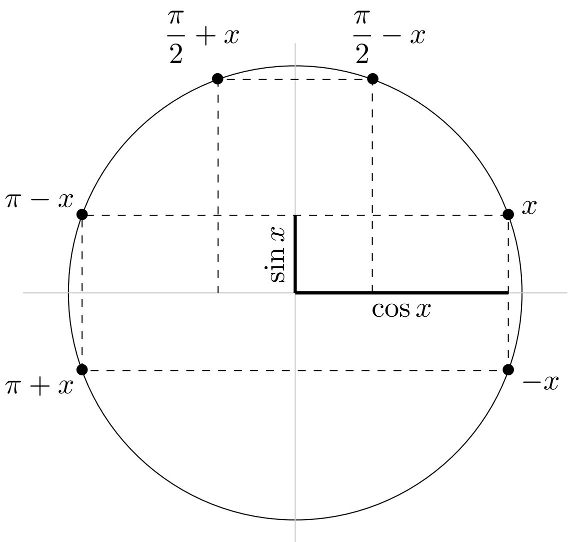
▷ L'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$ a pour solutions tous les nombres de la forme $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $\dfrac{5\pi}{6}+2k'\pi$, où k et k' sont des nombres entiers relatifs. On écrit $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, \dfrac{5\pi}{6}+2k'\pi, k \in \mathbb{Z}, k' \in \mathbb{Z}\right\}$.

III Propriétés

Théorème 2 : Angles associés

Pour tout nombre réel x,

$$\begin{array}{ll}
\cos(-x) = \cos x & \sin(-x) = -\sin x \\
\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x & \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\
\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x & \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \\
\cos(\pi - x) = -\cos x & \sin(\pi - x) = \sin x \\
\cos(\pi + x) = -\cos(x) & \sin(\pi + x) = -\sin(x)
\end{array}$$



Théorème 3 : Formules d'addition

Pour tous nombres réels a et b,

$$\begin{array}{ll}
\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b & \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b
\end{array}$$

Remarques :

▷ Nous avons vu la démonstration de la première ligne en activité.

▷ La deuxième ligne se déduit de la première en remplaçant b par $-b$. On peut choisir de l'apprendre par cœur, ou de savoir la retrouver (vite) à partir de la première.

Méthode : Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$.

▷ On écrit $a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)$ et on cherche un angle φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Prenons par exemple $\dfrac{3}{4}\cos t + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin t$: $a^2+b^2 = \sqrt{\dfrac{9}{16}+\dfrac{27}{16}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$,

donc on cherche φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: un choix possible est $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, et $\dfrac{3}{4}\cos t + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin t = \dfrac{3}{2}\cos\left(t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ pour tout nombre réel t.

Théorème 4 : Formules de duplication

Pour tout nombre réel x,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \sin(2x) = 2\cos x \sin x$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Théorème 5 : Transformation d'un produit en somme

Pour tous nombres réels a et b,

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b)+\cos(a+b)\big] \qquad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\big]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big[\sin(a+b)+\sin(a-b)\big]$$

Exemple :

▷ Pour tout nombre réel x, $\cos x\cos(2x) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(-x)+\cos(3x)\big) = \dfrac{1}{2}\big(\cos x + \cos(3x)\big)$

Théorème 6 : Transformation d'une somme en produit

Pour tous nombres réels p et q,

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Exemple :

▷ Pour tout nombre réel x, $\cos x + \cos(2x) = 2\cos\left(\dfrac{3}{2}x\right)\cos\left(-\dfrac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\dfrac{3}{2}x\right)\cos\left(\dfrac{1}{2}x\right)$