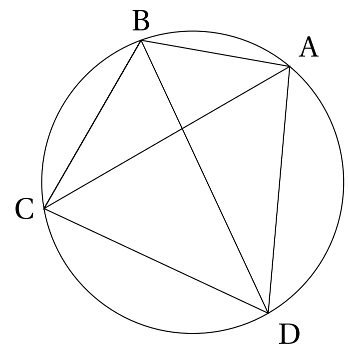
Théorème : Théorème de Ptolémée (IIe siècle)

A, B, C, D étant quatre points quelconques d'un cercle, on a :

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$$

1. Placer le point E sur le segment [BD] tel que $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$.
2. (a) Montrer que les triangles ABC et AED sont semblables.
   (b) En déduire que $AD \times BC = AC \times ED$.
3. (a) Montrer que les triangles ABE et ACD sont semblables.
   (b) En déduire que $BE \times AC = AB \times CD$.
4. Conclure en partant de $BD = BE + ED$.



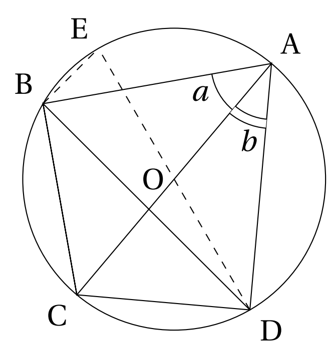
Corollaire : Formule de duplication des sinus

Quels que soient les angles aigus a et b,

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

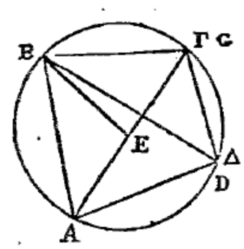
On commence par tracer un cercle dont le diamètre est pris comme unité, puis on trace un diamètre [AC] et on place deux points B et D sur ce cercle, de part et d'autre du diamètre, tels que $\widehat{BAC} = a$ et $\widehat{CAD} = b$. On place enfin le point E diamétralement opposé au point D sur le cercle.

1. Justifier que $\widehat{BED} = \widehat{BAD}$.
2. En déduire que $BD = \sin(a+b)$.
3. Justifier que $\sin a = BC$, $\cos a = AB$, $\cos b = AD$ et que $\sin b = CD$.
4. Conclure en appliquant le théorème de Ptolémée.
5. En déduire que, quels que soient les angles aigus a et b, on a :
   $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

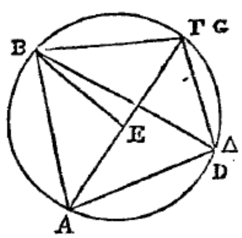


Source : http ://serge.mehl.free.fr/chrono/Ptolemee.html

Εϛω γὰρ κύκλος ἐγγεγραμμένον ἔχων τετράπλευρον τυχὸν τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ· δεικτέον ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις, τῷ τε ὑπὸ τῶν ΑΒ ΓΔ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΒΓ. Κείσθω γὰρ τῇ ὑπὸ τῶν ΔΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ἐὰν οὖν κοινὴν



Soit un quadrilatère quelconque inscrit dans le cercle ABGD ; soient menées les diagonales AG, BD : il s'agit de prouver que le rectangle, construit sur AG et BD, est égal aux deux rectangles des côtés opposés AB GD, et AD BG. Soit fait l'angle ABE égal à l'angle DBG ; si nous ajoutons à chacun l'angle commun EBD, l'angle ABD égalera l'angle EBG. Mais BDA est égal à BGE ; car ces deux angles sont inscrits et appuyés sur le même arc ; donc le triangle ABD est équiangle au triangle BGE. On a donc l'analogie : BG est à GE, comme BD est à DA : par conséquent, le produit de BG multiplié par AD est égal à celui de BD multiplié par GE. Maintenant puisque l'angle ABE est égal à l'angle DBG, et que l'angle BAE est égal à l'angle BDG, le triangle ABE est équiangle au triangle BGD ; on a donc l'analogie : BD est à DG, comme BA est à AE ; donc le rectangle BA DG est égal au rectangle BD AE. Or il a été prouvé que le rectangle BG AD est égal au rectangle BD GE ; par conséquent (*g*) le rectangle entier AG BD, est égal aux deux rectangles AB DG, et AD BG. Ce qu'il falloit démontrer.



προσθῶμεν τὴν ὑπὸ ΕΒΔ, ἔϛαι καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΕΒΓ· ἔϛι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ ἴση· τὸ γὰρ αὐτὸ τμῆμα ὑποτείνουσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐϛὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΒΓΕ τριγώνῳ· ὥστε καὶ ἀνάλογόν ἐϛιν, ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΓ ΑΔ ἴσον ἐϛὶ τῷ ὑπὸ ΒΔ ΓΕ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐϛὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ, ἔϛι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση τῇ ὑπὸ ΒΔΓ, ἰσογώνιον ἄρα ἐϛὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ, ἀνάλογον ἄρα ἐϛὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΑ ΔΓ ἴσον ἐϛὶ τῷ ὑπὸ ΒΔ ΑΕ· ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΓ ΑΔ ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΔ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΓ ΒΔ ἴσον ἐϛὶ συναμφοτέροις, τῷ τε ὑπὸ ΑΒ ΔΓ, καὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ptolémée, Claude, *Composition mathématique*, trad. Halma, Paris : Henri Grand, 1813, p. 29-30.