Cette fiche fait suite à une activité en groupes visant l'élaboration d'une démonstration du théorème de l'angle inscrit, avec des angles géométriques.

Énoncé :
Étant donnés un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, et A, B, M trois points de $\mathscr{C}$, quelle relation générale y a-t-il entre les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$? Émettre une conjecture, puis la démontrer.

Dans un deuxième temps, la démonstration est réalisée par l'enseignant avec les angles orientés.

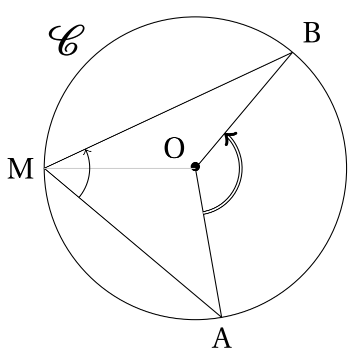
Rappels sur les angles orientés :

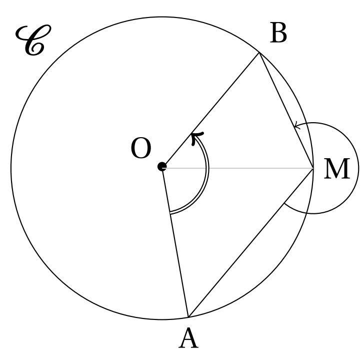
* Relation de Chasles : pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$.
* Dans tout triangle ABC, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\pi \quad [2\pi]$.

Théorème : L'angle au centre est double de l'angle inscrit

Étant donnés un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux points A et B sur ce cercle, alors pour tout point M appartenant à $\mathscr{C}$, on a :

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) \quad [2\pi]$$





Démonstration :
$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\right)$

or dans le triangle isocèle OMA : $2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)+\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\right)=\pi \quad [2\pi]$

et dans le triangle isocèle OMB : $2\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}\right)=\pi \quad [2\pi]$

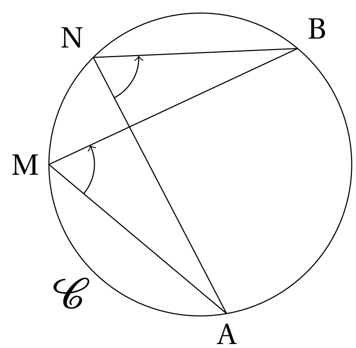
donc $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\right)=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)-\pi+2\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right)-\pi=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) \quad [2\pi]$

Corollaire

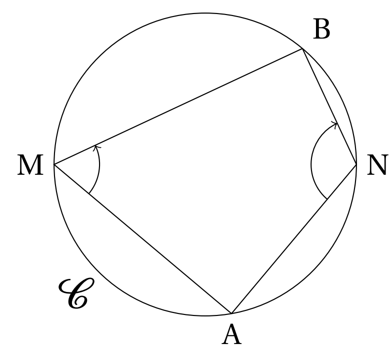
Étant donnés un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux points A et B sur ce cercle, alors pour tous points M et N appartenant à $\mathscr{C}$, on a :

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}\right) \quad [\pi]$$

Démonstration :
Notons O le centre du cercle. D'après le théorème ci-dessus,
$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \quad [2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 2\left(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}\right) \quad [2\pi]$
Donc $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}\right) \quad [\pi]$



si M et N sont d'un même côté de [AB],
$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}\right) \quad [2\pi]$



si M et N sont de part et d'autre de [AB],
$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}\right) \quad [2\pi]$

Théorème : Caractérisation de la cocyclicité

Quatre points du plan A, B, C, D sont alignés ou cocycliques si et seulement si :

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right) \quad [\pi]$$

Démonstration :
Si les points A, B, C, D sont alignés, alors on a $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right) = 0 \quad [\pi]$
Si les points A, B, C, D sont cocycliques, alors on a $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right) \quad [\pi]$, d'après le corollaire précédent.
Nous avons donc prouvé le sens direct. La réciproque est plus délicate à écrire, nous ne la présentons pas ici.